Matematika

1. ročník

21. 11. 2022

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Disjunkce výroků p a q

Disjunkce je binární spojka.

Disjunkce výroků p a q se zapisuje $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ a čte **„ *p vel q*“** (česky **„*p nebo q*“**).

p	q	$\boldsymbol{p \vee q}$
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Implikace výroků p a q

Implikace je binární spojka.

Implikace výroků p a q se zapisuje $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ a čte „ $\boldsymbol{p}$ **implikuje** $\boldsymbol{q}$“ (česky **„jestliže** $\boldsymbol{p}$**, potom** $\boldsymbol{q}$“).

Výrok $\boldsymbol{p}$ se **nazývá předpokladem** (také **premisou** nebo antecedentem) a **výrok** $\boldsymbol{q}$ **závěrem** (či **konsekventem**) této implikace.

p	q	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Implikace výroků p a q

Pohledem do tabulky se nám spojka implikace $p \Rightarrow q$ jeví dosti nenápadně, přesto právě ona je **základem logiky myšlení**.

Pro implikaci platí:

a) **implikace je nepravdivá**, jestliže předpoklad implikace p je **pravdivý** a závěr implikace q je **nepravdivý**, ve všech ostatních případech je pravdivá, mj. to ukazuje, že implikace je jediná z dvoumístných spojek, u které záleží na pořadí výroků p a q,

tj. **implikace $p \Rightarrow q$ vyjadřuje obecně něco jiného než implikace $q \Rightarrow p$**.

b) implikace je pravdivá vždy, je-li nepravdivý její předpoklad

c) implikace je pravdivá vždy, je-li pravdivý její závěr.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Ekvivalence výroků p a q

Ekvivalence je binární spojka.

Ekvivalenci výroků p a q se zapisuje $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ a čte „***p* je ekvivalentní *q***“ (česky „***p* právě tehdy, jestliže *q***“).

p	q	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Pohledem na tabulku, lze zjistit, že ekvivalence $p \Leftrightarrow q$ **je pravdivá pouze** v případě, **pokud** mají **výroky *p* a *q* stejné pravdivostní ohodnocení**.

Formule výrokového počtu

V matematické logice je **výroková proměnná** taková proměnná, která může nabývat hodnot pravda anebo nepravda.

Konečná posloupnost **výrokových proměnných, logických spojek a závorek** se nazývá formulí výrokového počtu (zkráceně **výrokovou formulí** nebo jen formulí), jestliže byla vytvořena podle těchto pravidel:

a) Každá výroková proměnná je formule výrokového počtu.

b) Jsou-li α a β formule výrokového počtu,
potom $(\neg\alpha)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\Rightarrow\beta)$ a $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ jsou rovněž formule výrokového počtu.

c) Všechny formule výrokového počtu vznikají konečným počtem aplikací pravidel a) a b), žádným jiným způsobem formule výrokového počtu nevznikají.

Výrokové formule se značí malými písmeny řecké abecedy α, β, γ, …, ψ, ω.

Správný zápis složitějších formulí užitím definice může být dosti nepřehledný, proto se zavádějí různé úmluvy, které zápis zjednoduší:

a) Vynecháme vnější závorky, např. nepíšeme $((p\Rightarrow q)\Rightarrow r)$, ale $(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$.

b) Předpokládáme, že spojka ¬ „váže silněji“ než všechny zbývající spojky, tedy např. místo $(\neg p)\vee q$ píšeme $\neg p\vee q$.

Výroková formule

Definice výrokové formule otvírá velký prostor kombinací symbolů. Abychom se v něm vyznali, je třeba si ujasnit jeho nejjednodušší části:

a) jak vypadají formule obsahující pouze jednu výrokovou proměnnou nebo spojku negace a výrokovou proměnnou,

b) jak vypadají formule obsahující pouze dvě výrokové proměnné a jednu ze spojek konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.

Jak jsme uvedli, tak logiku nezajímá svět kolem. Nepátrá po obloze jako astronomie, nezkoumá jevy jako třeba optika, ani si nestaví nové světy jako matematika. Vystačí si s tím, co už v hlavě máme. **Logika pouze tvoří nové formule z výroků, které jsou dány.**

Z tohoto pohledu, pokud se informace v logickém kroku

- plně zachovává – jedná se o **tautologii**;
- částečně ztrácí – jedná se o **dedukci**;
- zvětší – jedná se o **logickou chybu**.

Tautologie

Tautologie výrokového počtu je každá formule výrokového počtu, která **je vždy pravdivá** (tj. bez ohledu na pravdivost či nepravdivost vstupujících výroků).

Příklad 5.

Rozhodneme, zda formule $p \Leftrightarrow p$, $p \vee \neg p$ a $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ jsou tautologie

p	$p \Leftrightarrow p$
0	**1**
1	**1**

Formule $p \Leftrightarrow p$ je **tautologie** a nazývá se **zákonem totožnosti.**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	**1**
1	0	**1**

Formule $p \vee \neg p$ je tautologie. Byla známa již ve starověku a nazývá se ***zákonem vyloučené třetí možnosti*** (lat. tertium non datur, třetí možnost není dána).

Formule $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ je také tautologie.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**

Příklad 6

Příklad 6.

Dokažte, že formule $\varphi = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautologie.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	φ

Příklad 7

Příklad 7.

Dokažte, že formule $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$ je tautologie.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	φ

Kontradikce

Kontradikce výrokového počtu je každá formule výrokového počtu**, která je vždy nepravdivá** (tj. bez ohledu na pravdivost či nepravdivost vstupujících výroků).

Příklad 8.

Rozhodneme, zda formule $p \wedge \neg p$ je kontradikce.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	**0**
1	0	**0**

Formule $p \wedge \neg p$ je kontradikce.

Tato formule se nazývá **zákonem sporu**, protože vyjadřuje spor.

Spor je vždy nepravdivý, jak jsme zjistili.

Vztah mezi tautologií a kontradikcí

a) *Negace tautologie je kontradikce.*
b) *Negace kontradikce je tautologie.*

Příklad 9.

a) Víme, že formule $p \vee \neg p$ je tautologie,
tudíž formule $\neg(p \vee \neg p)$ je kontradikce.

b) Víme, že formule $p \wedge \neg p$ je kontradikce,
tudíž formule $\neg(p \wedge \neg p)$ je tautologie.

Splnitelná formule

*Výroková **formule** je **splnitelná**, jestliže není kontradikce.*

Tj. **formule je splnitelná**, když pro ni existuje **alespoň jedno pravdivé** ohodnocení.

Určitě platí: **Každá tautologie je také splnitelná formule**.

Také platí: Výroková formule **není splnitelná právě tehdy, jestliže je kontradikcí.**

DĚKUJI ZA POZORNOST