Matematika

1. ročník

16. 11. 2022

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Logika a množiny

Úvod každé prezentace by měl být jako správná minisukně, tj. krátký, plný příslibů, a přece cudně zdrženlivý.

Autor jedné z nejoriginálnějších filosofických koncepcí 20. století A. N. Whitehead napsal:

„První člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dní, udělal pozoruhodný krok v dějinách myšlení. Byl prvním člověkem, který uvažoval o pojmu patřícím do čisté matematiky."

Rovněž nikdy nikdo nenakreslil kružnici či bod.

Všechny geometrické pojmy jsou idealizovány, jsou absolutně dokonalé, proto nereálné.

Matematika by bez abstrakce, idealizace a fantazie nikdy neexistovala. Domnívat se, že fantazii potřebuje pouze umělec, je hluboký omyl.

Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody…

Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví.

Logika a množiny

Kepler mohl odvodit z pozorování, která udělal Tycho Brahe, své zákony o pohybu planet pouze z důvodu, že už 2000 let před ním vypracovali řečtí matematici teorii kuželoseček.

První zřetelné a jasné přirovnání matematiky k jazyku vědy vyslovil Galileo Galilei:

„*Filosofie světa je obsažena v grandiózní knize stále otevřené všem a každému – myslím tím knihu přírody. Porozumět jí však může jen ten, kdo se naučí jejímu jazyku a písmu, jímž je napsána. Napsána je jazykem matematiky a jejím písmem jsou matematické* vzorce.“

Smysl tohoto Galileiho přirovnání je samozřejmě hlubší. Bez matematiky by mnohé technické i naučné objevy nebyly možné. Galileův básnický příměr platí svým způsobem stále (i přes odstup čtyř století).

Jeden z největších fyziků 20. stol. Werner Heisenberg charakterizoval postavení matematiky v současné fyzice velmi podobně:

„*Původním, prvotním jazykem, který vzniká v procesu vědeckého osvojování faktů, je obvykle pro fyziku jazyk matematiky, zvláště pak matematické schéma, které fyzikům dovoluje předvídat výsledky budoucích experimentů.*“

Logika a množiny

Newton mohl vybudovat svou nebeskou mechaniku pouze tehdy, když už byly položeny základy diferenciálního a integrálního počtu.

Lze říci, že pro matematiku i logiku je charakteristická její *systematičnost*, ale také je velmi důležitá hospodárnost i obsažnost jejího vyjadřování. Matematická a logická symbolika umožňují zjednodušit zápis informací, zpřehlednit jej a vhodně přizpůsobit dalšímu zpracování.

V rozvoji takových formalizovaných zápisů se před nedávnem objevil nový směr – je spjat s výpočetní technikou a jejím využitím v nejrůznějších oblastech lidské činnosti. Se strojem je nutno „hovořit“, komunikovat, stroji je třeba předem určit způsoby rozhodování ve všech v úvahu přicházejících situacích tak, aby mohl vybrat v daných podmínkách nejsprávnější postup.

Stroj běžné řeči nerozumí. Je třeba s ním „rozmlouvat“ jazykem jemu srozumitelným – tj. jazykem přesným, jednoznačným, neobsahujícím žádnou nedostatečnou nebo nadbytečnou informaci.

Logika a množiny

Dnes se užívá celé řady jazykových systémů, jejichž prostřednictvím stroje sdělované informace přijímají, jednoznačně a spolehlivě s nimi pracují.

To je také jedno z tajemství rychlosti počítačů, schopnosti snadno zvládnout i nejnáročnější numerické a logické operace.

Za tisíciletí své existence prošla matematika velkou a složitou cestou, během níž se nejednou změnil její charakter, obsah a styl výkladu.

Z primitivního obratného počítání s kamínky na počitadle a od jednoduchých záznamů

na vrubovkách vyrostla matematika dnes v rozsáhlou vědní disciplínu s vlastním předmětem zkoumání a se specifickou metodikou. Vypracovala si vlastní jazyk, velmi přesný a ekonomický, neobyčejně efektivní nejen pro matematiku samu, ale i pro četné oblasti matematických aplikací.

Uveďme ještě vyjádření ruského matematika Pafnutije Lvoviče Čebyševa:

„*Matematika vznikla a rozvíjela se vlivem všeobecného základního úkolu veškeré lidské činnosti – používat existujících prostředků k dosažení největšího užitku.*“

Logika a množiny

Dnes se užívá celé řady jazykových systémů, jejichž prostřednictvím stroje sdělované informace přijímají, jednoznačně a spolehlivě s nimi pracují.

To je také jedno z tajemství rychlosti počítačů, schopnosti snadno zvládnout i nejnáročnější numerické a logické operace.

Za tisíciletí své existence prošla matematika velkou a složitou cestou, během níž se nejednou změnil její charakter, obsah a styl výkladu.

Z primitivního obratného počítání s kamínky na počitadle a od jednoduchých záznamů

na vrubovkách vyrostla matematika dnes v rozsáhlou vědní disciplínu s vlastním předmětem zkoumání a se specifickou metodikou. Vypracovala si vlastní jazyk, velmi přesný a ekonomický, neobyčejně efektivní nejen pro matematiku samu, ale i pro četné oblasti matematických aplikací.

Uveďme ještě vyjádření ruského matematika Pafnutije Lvoviče Čebyševa:

„*Matematika vznikla a rozvíjela se vlivem všeobecného základního úkolu veškeré lidské činnosti – používat existujících prostředků k dosažení největšího užitku.*“

Logika a množiny

Každá věda (tedy i ekonomie) nás nutí, abychom definovali nové pojmy i vytvořili nové teorie. Jejich cílem je strhnout stěnu rozporů, která často tarasí cestu vědeckému pokroku.

Zde je role matematiky i logiky nezastupitelná.

Všechny podstatné myšlenky v libovolné vědě se zrodily z dramatické srážky mezi realitou a naším úsilím tuto realitu pochopit – objeví se problém, jehož řešení vyžaduje nových zásad.

S novou teorií se snažíme nalézt svou cestu bludištěm pozorovaných faktů a uspořádat a pochopit svět svých smyslových dojmů.

Žádáme, aby pozorovaná fakta logicky vyplývala z našeho obrazu skutečnosti.

Bez víry, že je možno postihnout skutečnost našimi teoretickými konstrukcemi, bez víry ve vnitřní harmonii našeho světa by nebylo vědy.

Tato víra je a vždy zůstane základním motivem všeho vědeckého tvoření. Ve všem našem úsilí, v každém dramatickém zápolení mezi starými a novými názory poznáváme věčnou snahu o porozumění, věčnou a pevnou víru v harmonii našeho světa, která stále sílí rostoucími obtížemi, jež se stavějí v cestu naší chápavosti.

Logika a množiny

Když vědec nezná odpověď na problém, žije v nevědomosti. Když výsledek tuší, žije v nejistotě. A když má proklatě velkou jistotu o charakteru výsledku, ještě pořád ho hlodají nějaké pochybnosti.

Zjistili jsme, že pro dosažení pokroku to má ohromný význam. Musíme uznat naši ignoranci a ponechat prostor pochybám. Vědecké poznatky jsou souborem tvrzení pronesených s různým stupněm jistoty – některá tvrzení jsou naprosto nejistá, některá skoro jistá, ale žádná nejsou jistá absolutně.

Matematika je věda zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti.

Díky těmto vlastnostem je matematika často označována za **královnu věd** a logika za kněžnu věd.

V její historii se zrcadlí mnohé z nejhlubších myšlenek bezpočtu generací lidstva.

Množiny

Matematické objekty mají vesměs abstraktní charakter (ať již jde o čísla, zobrazení, funkce, operace, relace, plochy, struktury, příp. něco jiného) a základním požadavkem je tedy správně rozumět jazyku, jímž matematika o těchto objektech hovoří.

Jazyk matematiky v sobě sdružuje prostředky potřebné pro zavádění a popis vlastností matematických objektů a je výsledkem dlouhodobého vývoje.

Dnes je možné o jazyce matematiky říci, že jde o množinově logický jazyk matematiky.

Jak tato věta napovídá, základním matematickým pojmem je **množina**.

Jde o prvotní či primární pojem, tudíž jej nemůžeme definovat. Může jej vymezit filosofie matematiky.

Množina *je souhrn objektů určitých vlastností, které chápeme jako celek.*

Uvedený popis pojmu množina není možné pokládat za její definici. Poznamenejme, že množinu také nelze definovat v nějakém běžném smyslu v elementární logice.

Dále si všimněme, že v této filosofické definici slovo souhrn nahrazuje slovo množina.

Objekty množiny se nazývají **prvky množiny**.

Množiny

Charakterizující vlastností množiny je, že je jednoznačně určena svými prvky (ale nevšímá si jejich pořadí ani žádné další struktury).

V matematice existuje abstraktní teorie množin, zkoumající množiny z formálního hlediska.

Současná axiomatická teorie množin se vyvinula během dvacátého století z naivní teorie množin, kterou zavedli Georg Cantor a další koncem 19. století.

Dále se omezíme na **množiny, které obsahují různé typy čísel**, příp. s nimi souvisí.

V tzv. naivní teorii množin bylo dosaženo mnoha vynikajících výsledků v oblasti zkoumání vlastností nekonečných množin, což byla ostatně hlavní Cantorova motivace pro její vytvoření.

Georg Cantor používal tuto definici množiny: *Množinou A rozumíme souhrn určitých a rozlišitelných objektů x existujících v naší mysli. Těmto objektům říkáme prvky množiny A.*

První přesný popis těchto objektů byl ve spisu pražského rodáka Bernarda Bolzana o zkoumání nekonečných množin.

Množiny - značení

a) **Množiny** se označují velkými písmeny latinské abecedy ***A*, *B*, *C***, …, příp. s indexy. Pro některé množiny (speciálně číselné) jsou vyhrazena speciální písmena.

b) **Prvky množin** se označují malými písmeny latinské abecedy ***a*, *b*, *c***, …, příp. s indexy.

c) Připouští se množina, která neobsahuje žádné prvky, nazývá se **prázdnou množinou** a značí se symbolem $\boldsymbol{\emptyset}$

d) Symbolem $\boldsymbol{a \in A}$ se označuje tvrzení: **$\boldsymbol{a}$ je prvkem množiny $\boldsymbol{A}$** (a patří do množiny A).

e) Symbolem $\boldsymbol{a \notin A}$ se označuje tvrzení: **$\boldsymbol{a}$ není prvkem množiny $\boldsymbol{A}$** (a nepatří do množiny A).

f) Jestliže A je konečná množina obsahující právě prvky a_1, a_2, …, a_n, potom se tato skutečnost zapisuje $\boldsymbol{A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$, tzn. množina A je zapsána výčtem prvků.

g) Jsou-li A a B množiny, potom množina A je rovna množině B (a označuje se $\boldsymbol{A=B}$) právě tehdy, jestliže množiny A a B mají stejné prvky.

V opačném případě jde o různé množiny A a B, tato skutečnost se zapisuje $\boldsymbol{A \neq B}$.

Množiny - značení

Tvrzení A je neprázdná množina nebo zápis $A \neq \emptyset$ znamená, že množina A obsahuje alespoň jeden prvek.

Některé množiny se takto standardně označují:

$\boldsymbol{N}$ množina všech kladných přirozených čísel,

$\boldsymbol{Z}$ množina všech celých čísel,

$\boldsymbol{Q}$ množina všech racionálních čísel,

$\boldsymbol{R}$ množina všech reálných čísel.

Jsou-li a a b prvky,

potom určitě $\{a, b\} = \{b, a\}$, tj. nezáleží na pořadí zápisu prvků a a b v množině.

Množinu $\{a, b\}$ *nazýváme* ***neuspořádanou dvojicí prvků*** *a* ***a*** *b.*

Příklad 1.

Určitě platí $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 1\}$.

Logika

Logiku je obvyklé charakterizovat jako analýzu metod lidského myšlení nebo uvažování, což odpovídá i etymologii slova logika (znamenala původně „umění řeči“).

Slovo logika je odvozeno z řeckého λογος (čti logos, což v řečtině znamená slovo či „smysluplná“ řeč, nebo také pojem – odvozeno ze slovesa legein, což je sbírat, mluvit, počítat).

Termín logika skrývá více významů – v současnosti se používá jako myšlenková cesta, která vede k daným závěrům.

Jde o formální vědu, zkoumající právě způsob odvozování správných závěrů z pravdivých tvrzení.

S logikou jsou potíže. Topíme se v problémech a tušíme, že mnohé z nich by byly řešitelné lepším uplatněním logiky. Kvalita myšlení určuje úspěšnost každého jednotlivce i společnosti.

Vadné myšlení, ať je to nesprávný výběr argumentů nebo logické chyby, stojí obrovské prostředky a vede k frustraci.

Logika

Často se slovo logika objevuje s různými přívlastky, hovoří se o matematické logice, formální logice, symbolické logice, ale také o pravděpodobnostní logice, deontické logice a mnoha dalších.

Termín logika se často vyskytuje i v běžné řeči v rozmanitých slovních spojeních jako *to nemá žádnou logiku*, *neúprosná logika vývoje* … apod. Možná to bude tím, že při definici logiky se používá termín myšlení, aniž bychom si rozmysleli, co myšlení je.

Myšlení je takový proces zpracování informace, aby bylo dosaženo nějakého cíle.

Logika je tedy věda o správném vedení tohoto procesu.

Evangelista sv. Jan v prvním verši první kapitoly svého Evangelia praví, že na počátku bylo Slovo (tj. λογος) , tedy jazyk, myšlení, uvažování, ale také řád věcí.

Logik si v této souvislosti klade otázku, jak tento řád uchopit, co je pravda, co je z pravdivých tvrzení odvoditelné, také jak obtížné je důsledky odvodit.

Logické odvozování se odehrává v jazyce. Každá vědní disciplína si vytváří svůj jazyk, má své pojmy, tedy svou logiku.

Logika

Jsou dva způsoby, jak se dozvědět něco o pravdivosti výroků a korektnosti tvrzení – rozum a důkazy. Máme dát přednost důkazům nebo rozumu?

Logika straní rozumu, ale jen do určité míry. Zdá se, že logické důkazy jsou redukovány na posloupnosti důkazů.

Zkoumá-li se nějaká struktura, postupuje se často tak, že se formuluje tvrzení o této struktuře, která jsou evidentní a která tuto strukturu pokud možno co nejlépe vystihují.

Potom se na základě jistých pravidel usuzování snažíme odvodit další netriviální tvrzení o zkoumané struktuře.

Logika

Logika se výrazně rozvinula i v matematice, a tak je také řazena i do matematiky, a zpravidla se nazývá **matematická logika**.

Termín matematická logika je možno chápat jako:

a) část logiky, která používá matematické prostředky a metody (v tomto případě hovoříme také o symbolické nebo formální logice),

b) logiku, která se používá v matematice (tzn. matematika a její jazyk je nejen nástrojem, ale i předmětem teoretických úvah – v takovém případě se spíše než o matematické logice hovoří o metamatematice, tj. o disciplíně, která se věnuje jazyku matematiky).

Budeme se samozřejmě zabývat spíše těmi aspekty logiky, které nejsou tak striktně svázány s matematikou samotnou a které mají obecnější metodologický dosah.

Logika

Logika (a také matematická logika) se musí budovat velice opatrně, abychom nedospěli ke **sporům**, které se také **označují jako paradoxy** (paradox je jazykový výraz překvapivého významu nebo úsudek s neočekávaným mnohdy protiintuitivním závěrem, z řeckých slov para, což znamená zvrácený, a doxa, což je myšlenka; ve starověké filosofii nazývaný též antinomie nebo aporie). Nejznámější je **paradox lháře**, nazývaný také paradox Kréťana či Epimenidův paradox. Původní znění paradoxu vyslovené Epimenidem je:

„*Všichni Kréťané jsou lháři*."

Podstatné je, že autorem tohoto výroku je Epimenidés, který je sám Kréťan. Způsob, kterým z tohoto faktu vyplývá logický spor, je shodný pro všechny formulace.

Paradox lháře je zřejmě nejmodernější reformulací popisovaného paradoxu.

Zní takto: „*Teď lžu*." či „*Tato věta je nepravdivá*."

Řešení paradoxu – v současné době se paradox lháře řeší tak, že se (obecný) jazyk rozčlení do několika úrovní (jazyk, metajazyk, metametajazyk, …) a stanoví se, že na každé z těchto úrovní lze hovořit jen o úrovních (ostře) nižších. Pak věta „*Tato věta je nepravdivá*." je větou nějaké úrovně jazyka, která hovoří sama o sobě, tedy o své vlastní úrovni, což bylo zakázáno.

Logika

Ve vyjadřování záleží i na umístění čárky:

Ve středověku byl jakýsi lupič odsouzen k trestu smrti.

Žádal krále o milost.

Král odpověděl třemi slovy:

POPRAVIT NE MILOST

Toto tvrzení nedává smysl,

ale napíšeme-li:

POPRAVIT, NE MILOST

Znamená to, že lupič má být popraven, protože nedostal milost.

Zapíšeme-li:

POPRAVIT NE, MILOST

Znamená to, že lupič dostal milost a nemá být popraven.

Mezi dvěma umístěními čárky je rozdíl jednoho lidského života.

Výrokový počet

Výrokový počet se zabývá studiem výroků, jejich vytvářením, jejich pravdivostí a jejich odvozováním.

Ani matematicky, ani logicky nelze pojem výrok (podobně jako pojem množina) definovat. Lze jej vymezit pouze filosofickou definicí:

Výrok je gramatická věta, u které má smysl otázka, zda je pravdivá či nepravdivá.

Pravdivost nebo nepravdivost výroku ale nemusíme znát. Výroky zachycují existenci objektů, zachycují stavy a popisují děje.

Výroky budeme značit výrokovými proměnnými $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Z hlediska gramatického výrok musí být oznamovací věta, ale také platí: ne každá oznamovací věta je výrok.

Příklad 2.

a) Věta „Kéž by sněžilo!“ není výrok, protože jde o přací větu, u které nemá smysl klást otázku o její pravdivosti nebo nepravdivosti.

b) „Sněží?“ není výrok, protože jde o tázací větu.

Výrokový počet

Výrokový počet pracuje se základními výroky a zjišťuje pravdivost či nepravdivost složených výroků na základě pravdivosti či nepravdivosti základních výroků. Jak vznikají složené výroky?

Mezi termíny logické povahy existuje malá vybraná skupina slov jako ***„ne…“, „…a…“, „…nebo…“, „jestliže…, potom …“, „… právě tehdy, jestliže …“***.

Všechna tato slova jsou nám velmi dobře známa z běžného jazyka a jsou prostředkem vytváření složených výroků z jednodušších výroků. V gramatice jsou (s výjimkou slova „*ne*“) řazena k tzv. větným spojkám (v logice se nazývají **logické spojky**).

Stanovit význam a způsob používání těchto slov (logických spojek) je úkolem základní části matematické logiky, která se nazývá **výrokovým počtem**.

Z jednotlivých výroků budeme vytvářet složitější výroky, které lze nazvat logická souvětí, užitím logických operací pomocí logických spojek (mnohdy ztotožňujeme logické operace s logickými spojkami).

Logické operace a spojky

Z jednotlivých výroků lze vytvářet složitější výroky, užitím logických operací pomocí logických spojek (mnohdy se ztotožňují logické operace s logickými spojkami).

Probereme nejdůležitější spojky výrokového počtu.

Bude uvedeno **pět logických operací (negace, disjunkce, konjunkce, implikace a ekvivalence)**, jejich užití v logických operacích při vytváření logických souvětí, a také čtení spojek. Výroky se budou označovat zpravidla malými písmeny abecedy.

Negace výroku *p*

Negace je jediná spojka, která se **váže právě na jeden výrok** (proto jde o unární spojku).

Negace výroku *p* se zapisuje $\neg p$ a čte se ***„non p“*** (česky ***„není pravda, že p“***).

Výroku se přiřazuje hodnota

- **0**, jde-li o výrok **nepravdivý**,
- **1**, půjde-li o výrok **pravdivý**.

Je použito označení **pravdivostních hodnot pravda a nepravda číslice 1 a 0**

Negace výroku p

p	$\neg p$
0	**1**
1	**0**

Pravdivé a nepravdivé výroky mají zajímavý vztah, realizovaný spojkou negace:

a) Z každého pravdivého výroku lze udělat nepravdivý – např. k výroku „*Stříbro je žluté.*“ mechanicky odvodit nepravdu „*Není pravda, že stříbro je žluté.*“, což lze ekvivalentně vyjádřit „*Stříbro není žluté.*“

b) Z každého nepravdivého výroku lze udělat pravdivý – např. k výroku „*Zlato je fialové.*“ mechanicky odvodit pravdu „*Není pravda, že zlato je fialové.*“, což lze ekvivalentně vyjádřit „*Zlato není fialové.*“

Pozor: negace je velmi náchylná k chybám. Je to proto, že přirozený jazyk zná několik způsobů vytváření opaku. Opakem „*černé barvy*“ je pro někoho „*bílá*“, pro jiného „*bílá nebo barevná*“, pro logika je to pouze barva „*nečerná*“.

Konjunkce výroků p a q

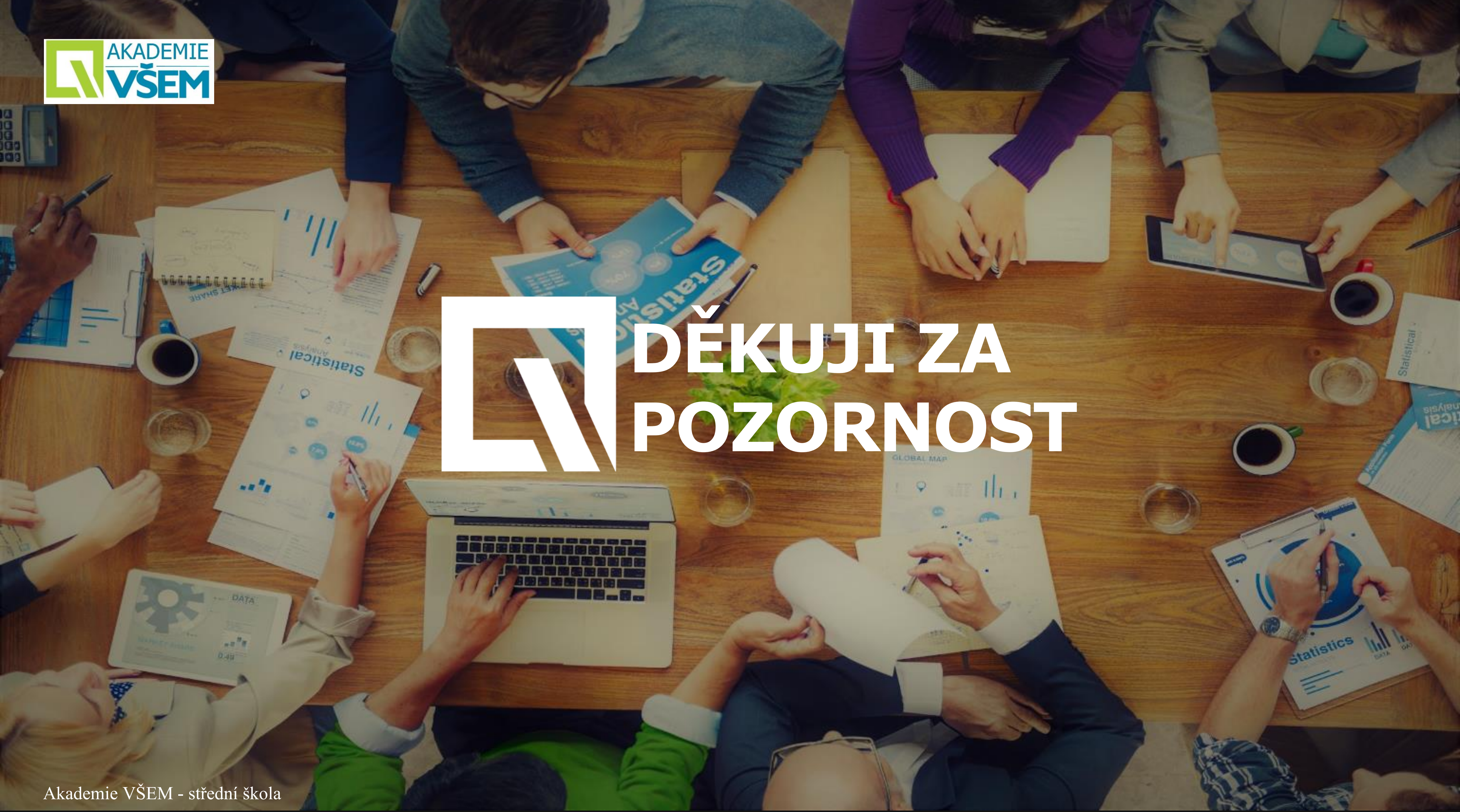
Další spojky jsou spojky, které se váží právě na dva výroky, proto jde o binární spojky.

Konjunkce výroků p a q se zapisuje $p \wedge q$ a čte se **„ *p et q*“**

(česky ***„p a q“*** nebo ***„p a současně q“***).

p	q	$p \wedge q$
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Logická spojka konjunkce **se vyjadřuje českou spojkou a**, ale ne každé české a vyjadřuje konjunkci, pro níž je charakteristické, že u ní nezáleží na pořadí výroků, tj. $p \wedge q$ a $q \wedge p$ mají stejné pravdivostní ohodnocení.



DĚKUJI ZA POZORNOST