AKADEMIE VŠEM STŘEDNÍ ŠKOLA

Matematika

1. ročník

16. 01. 2023

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Funkce jedné proměnné

Funkce jedné proměnné

Řekneme, že $f(x)$ je funkce jedné proměnné* (nebo zkráceně funkce), *jestliže f je přesný předpis, který každému reálnému číslu x přiřazuje nejvýše jedno reálné číslo $y = f(x)$ nazývané funkční hodnotou funkce f v bodě x.

***Definiční obor funkce* $f(x)$, *který značíme* $D(f)$, *je množina všech reálných čísel* x, pro *která* existuje *funkční* hodnota $y = f(x)$.**

***Obor hodnot funkce* $f(x)$, *který značíme* $H(f)$, *je množina* $\{f(x); x \in D(f)\}$,**

tj. $H(f) = \{f(x); x \in D(f)\}$.

***Je-li $f(x)$ funkce jedné proměnné, potom graf funkce $f(x)$ je množina všech bodů v rovině $[x, f(x)]$ pro $x \in D(f)$*, tj. jde o množinu $\{[x, f(x)]; x \in D(f)\}$.**

Kvadratická funkce

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

$f(x) = 0 <=>$ kořeny rovnice

$D = b^2 - 4ac \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Příklad 19

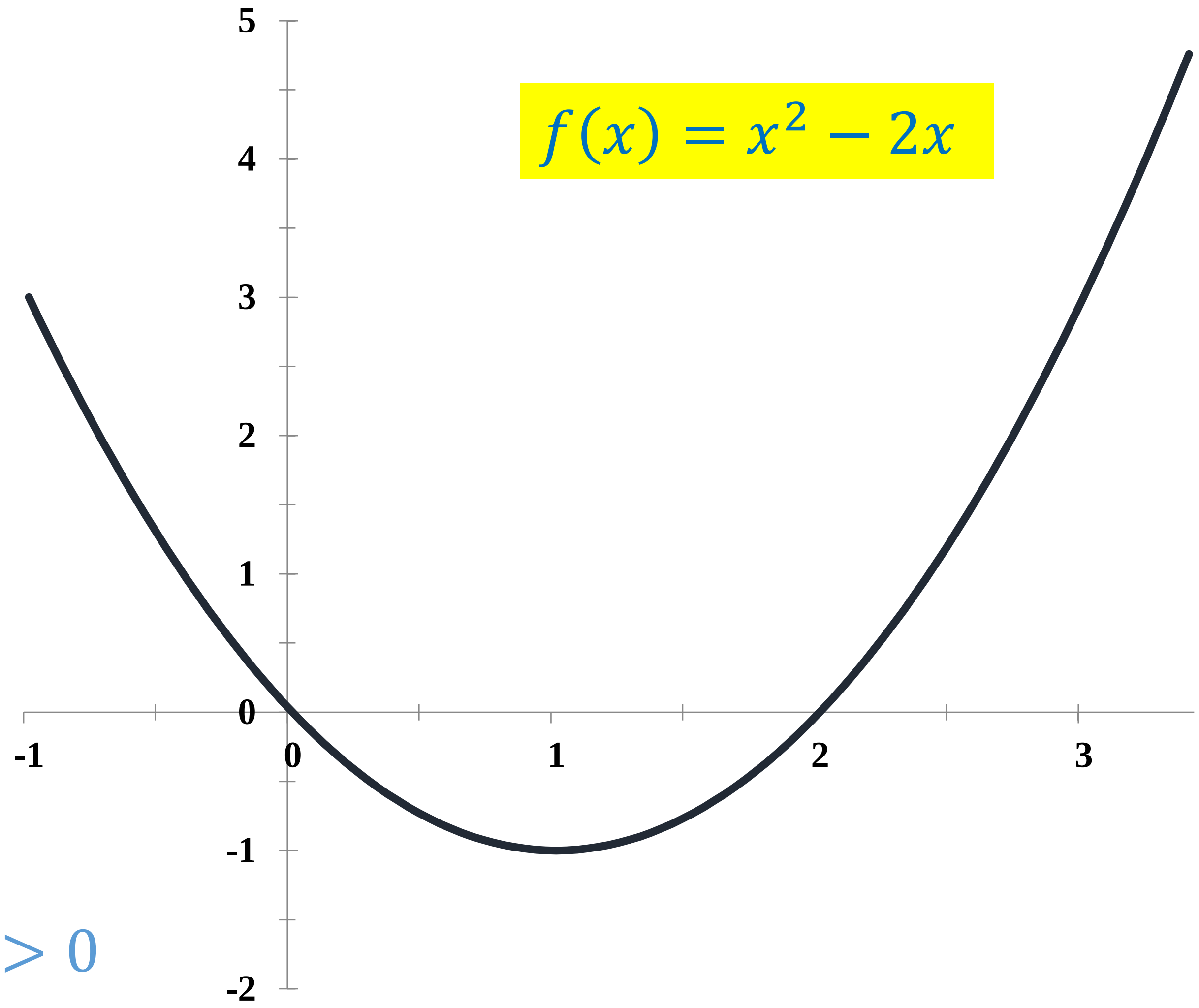
Příklad 19a

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = x^2 - 2x$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty)$,

$H(f) = \langle -1, \infty)$.



Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 > 0$

$x_1 = 0 \; x_2 = 2$

Příklad 19

Příklad 19b

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = x^2 - 2x+1$.

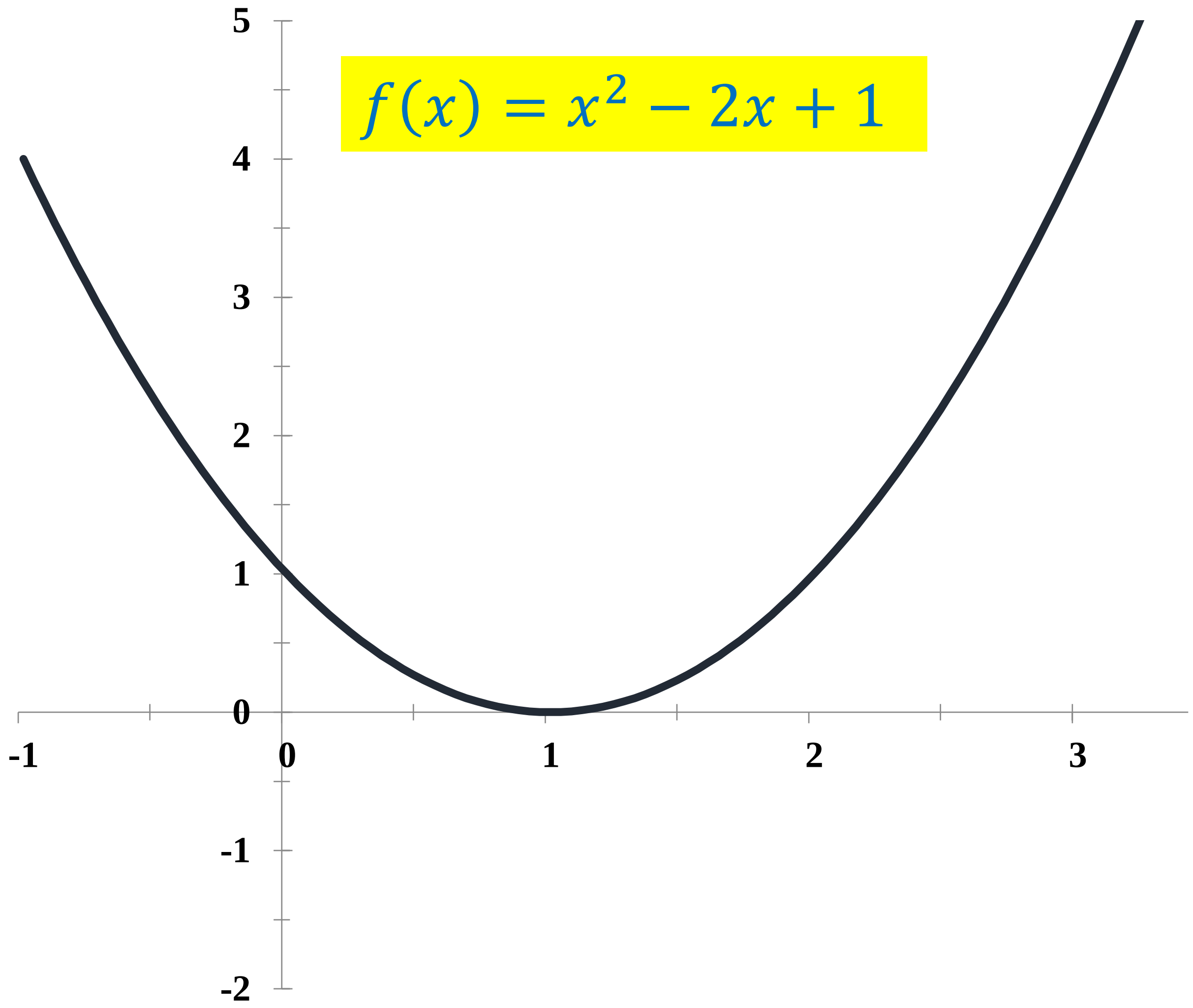
Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty)$,

$H(f) = \langle 0, \infty)$.

Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{0}$

$x_{12} = 1$



Příklad 19

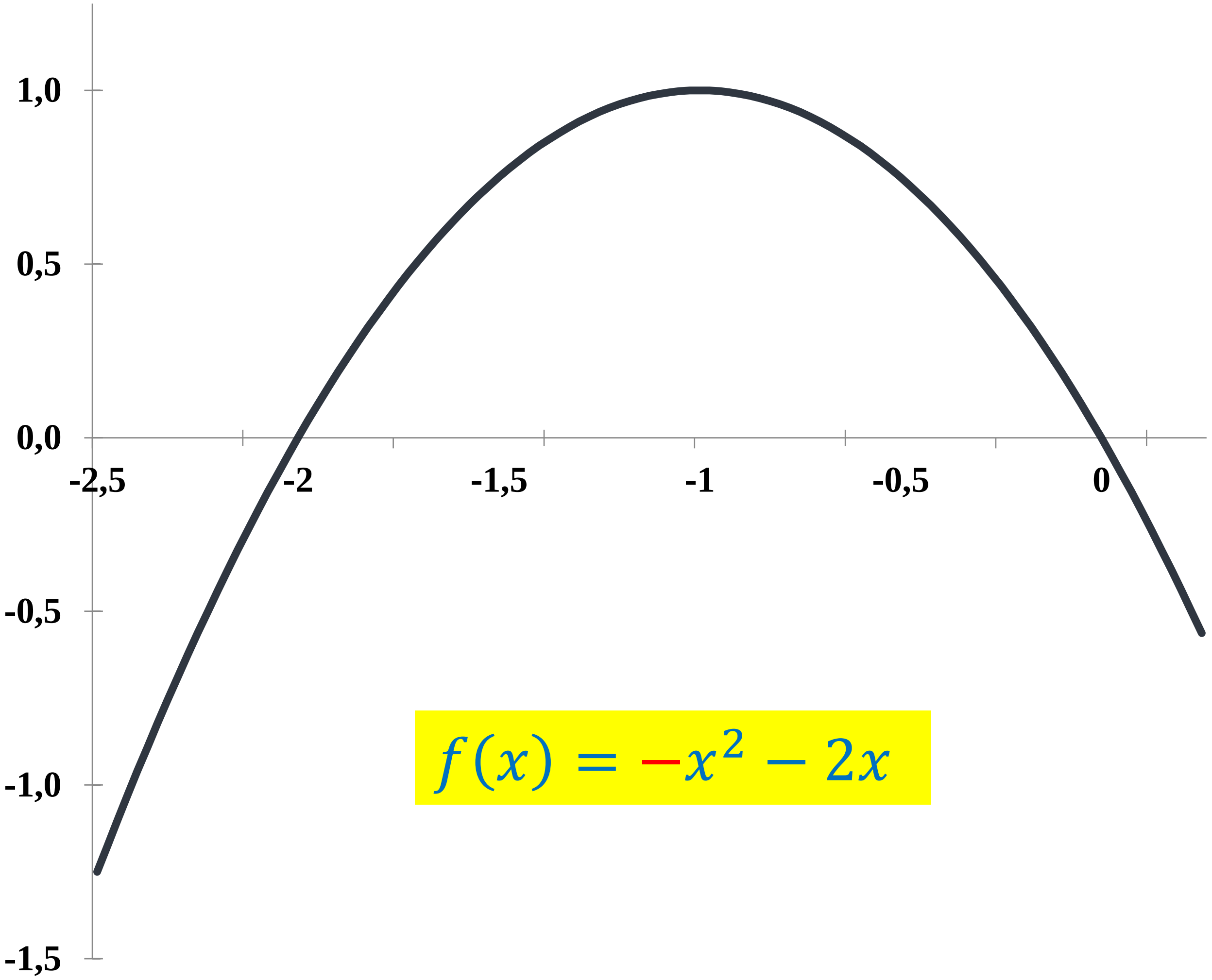
Příklad 19c

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = -x^2 - 2x$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty)$,

$H(f) = (-\infty, 1\rangle$.



Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 4 > 0$

$x_1 = -2\ x_2 = 0$

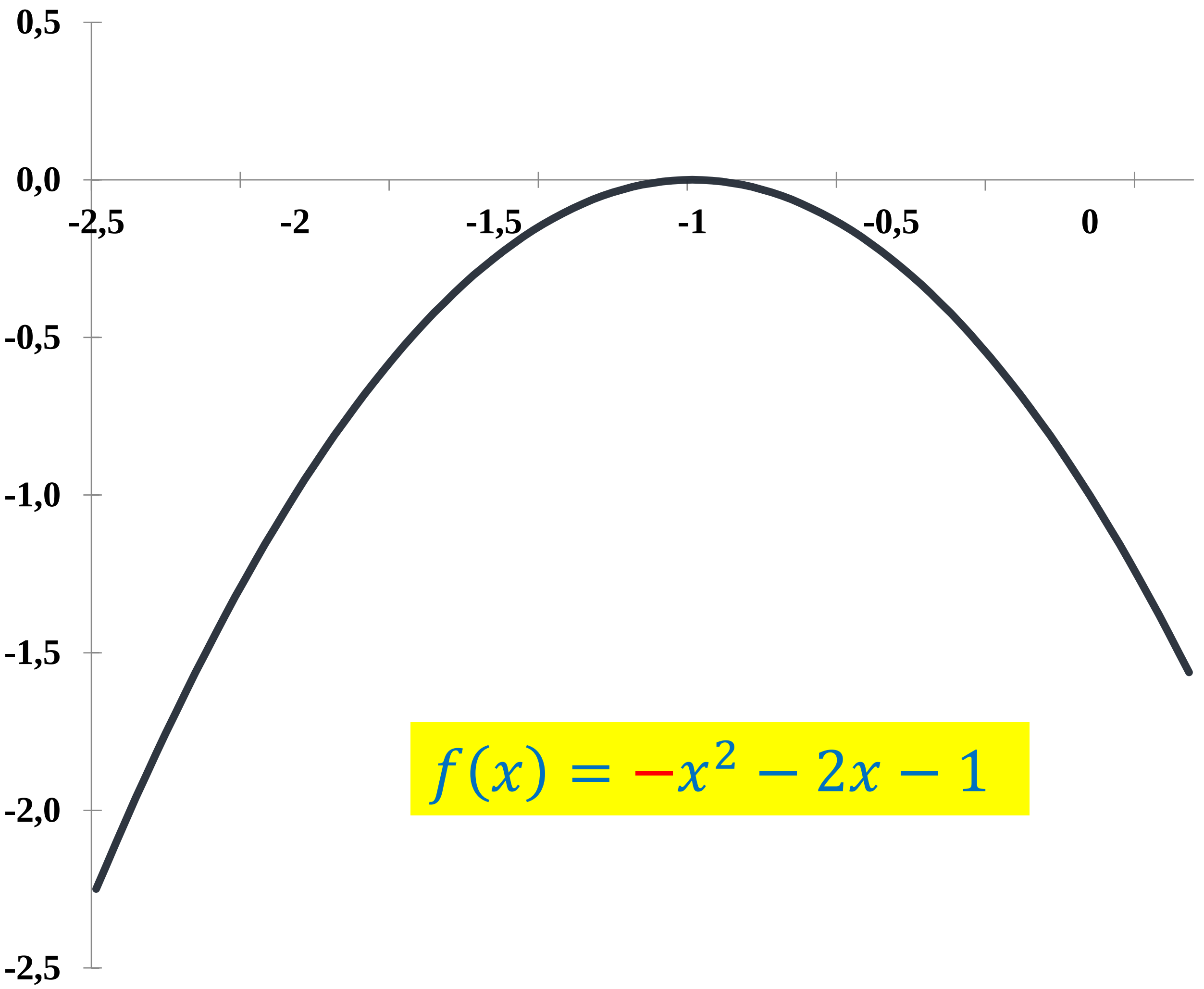
Příklad 19

Příklad 19d

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = -x^2 - 2x - 1.$
Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty),$

$H(f) = (-\infty, 1\rangle.$



Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$
$x_{12} = -1$

Příklad 19

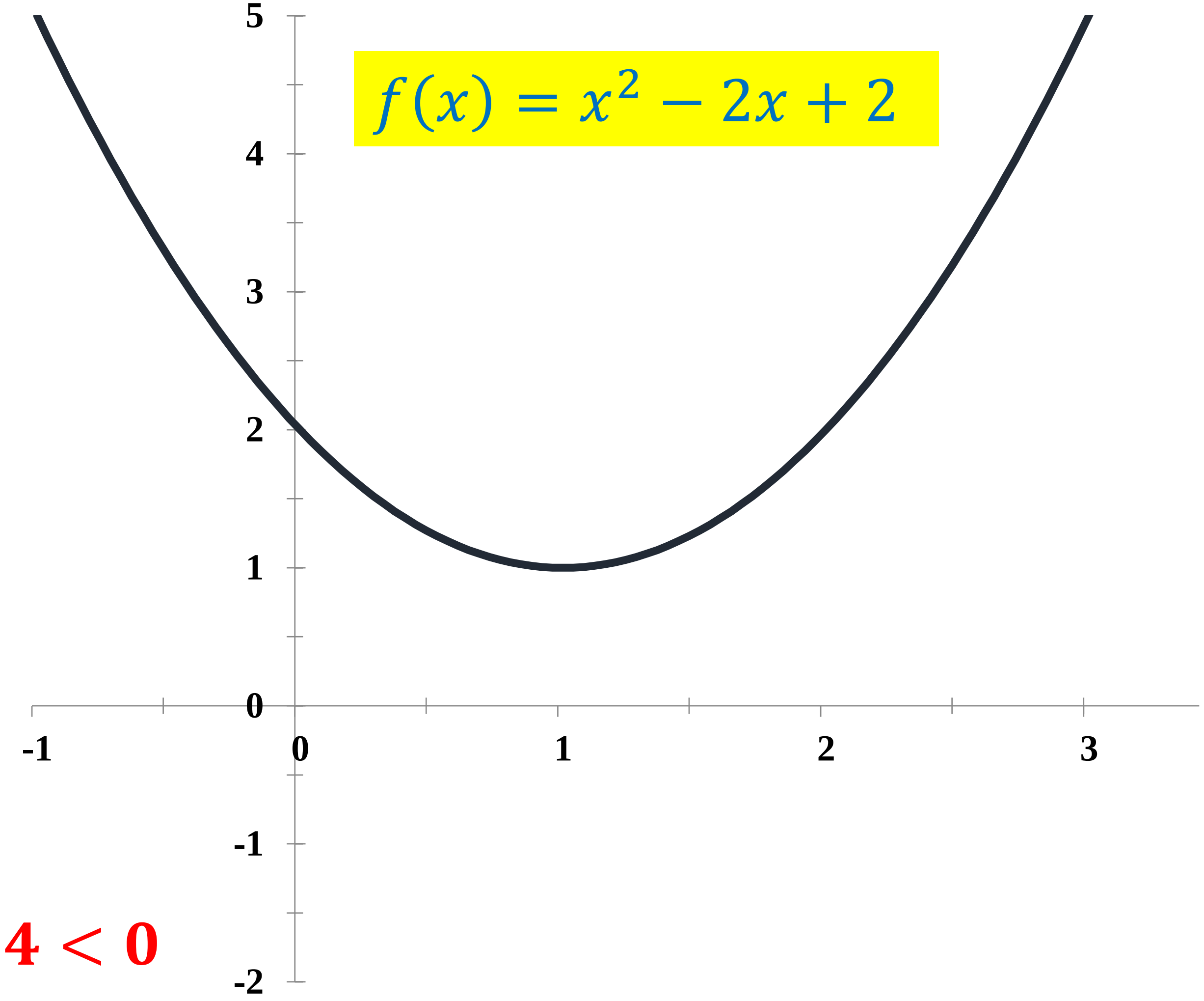
Příklad 19e

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty)$,

$H(f) = \langle 1, \infty)$.



Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = \mathbf{-4 < 0}$

Příklad 19

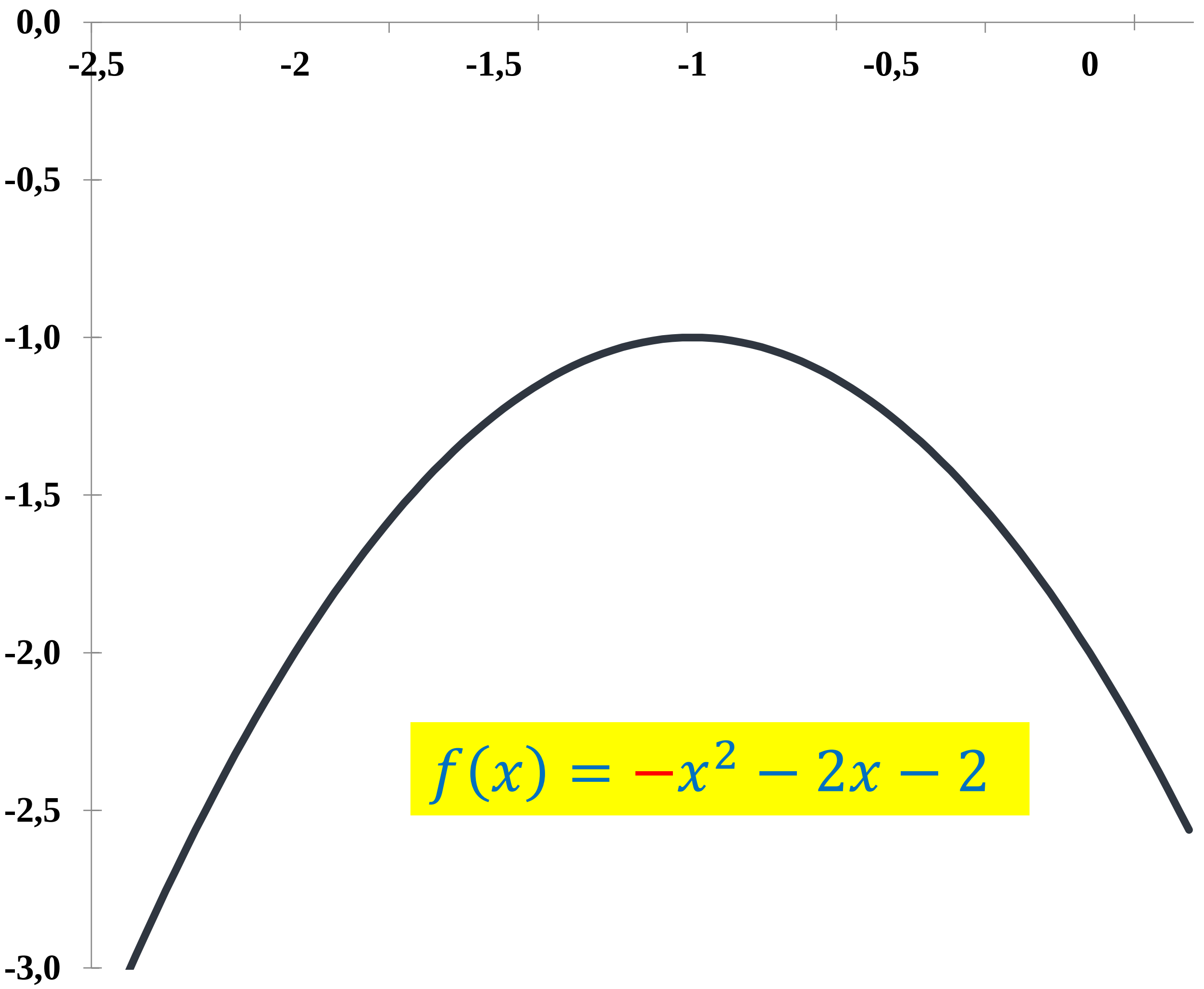
Příklad 19d

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = -x^2 - 2x - 2$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(f) = (-\infty, \infty)$,

$H(f) = \langle -1, -\infty)$.



Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = \mathbf{-4 < 0}$

Kvadratické rovnice – příklady k procvičení

$$(x-2)^2+(x-9)^2=(x-11)^2$$ $x\in\{-6;6\}$

$$\frac{x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x+5}=\frac{x(x-1)+12}{x(x+8)+15}$$ $x\in\{1;4\}$

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$$ $x\in\{1\}$

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2$$ $x\in\{4\}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$$ $x\in\left\{\frac{16}{25}\right\}$

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}-\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}=\frac{5}{6}$$ $x\in\{7\}$

$$\frac{\frac{5x}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{x}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{x}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{4x}{15}-\frac{1}{3}}$$ $x\in\{0;6\}$

$$2+x=\frac{4}{2-x}$$ $x\in\{0\}$

$$x=\frac{4}{5-\frac{4}{5-x}}$$ $x\in\{1;4\}$

Nerovnice

Mějme dvě funkce f (x) a g (x).

Nerovnicí pak rozumíme výrazy v jednom z těchto tvarů:

$f(x) < g(x)$ $f(x) > g(x)$

$f(x) \leq g(x)$ $f(x) \geq g(x)$

Řešením nerovnice jsou všechny x z (obvykle) množiny **reálných čísel**, pro která je nerovnice splněna.

Příklad nerovnice:

$6x < 12$. Platí, že $f(x) = 6x$ a $g(x) = 12$.

Řešením této nerovnice jsou všechna x, která jsou menší než dva: $x < 2$.

Tedy interval $(-\infty, 2)$.

Nerovnice

Záměna stran se změnou znaménka

U rovnic lze bez obav zaměnit pravou stranu za levou.
To **u nerovnic nelze udělat**.
Například u nerovnice $x < 5$, nemůže zároveň platit $5 < x$.
V prvním případě je x menší než pět, ve druhém je x větší než pět.
Avšak pokud s záměnou stran bude zároveň změněno znaménko nerovnosti, bude se již jednat o **ekvivalentní úpravu**.

Přičtení výrazu

K nerovnici lze přičíst číslo nebo funkci, která je definovaná na stejném oboru, v jakém oboru nerovnici řešíme.
Příklad: K nerovnici $x > 0$ lze přičíst například číslo tři. Potom získáme nerovnici $x + 3 > 3$.
Podobně lze přičíst celou funkci.
Výraz lze pochopitelně tak odečítat — neboli lze přičíst záporné číslo.

Nerovnice

Vynásobení nerovnice kladným výrazem

Nerovnici již nelze vynásobit nějakým výrazem, jako u rovnic.
Platí, že při násobení výrazem, který je vždy kladný, jedná **ekvivalentní úpravu**.
Při násobení záporným výrazem, je nutno **změnit znaménko.**
Samozřejmě stejně jako u rovnic nelze násobit nulovým výrazem!

Nelze ale nerovnici jen tak vynásobit proměnnou x, protože obecně proměnná může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot a to je nepřípustné.
Existují však situace, kdy bude x vždy kladné. Například vždy nezáporný výraz je druhá mocnina (za podmínky, že x není rovno nule).
Existuje více funkcí, které jsou vždy kladné.

Nerovnice

Umocnění a odmocnění nerovnice přirozeným číslem

Umocnění nerovnice obecně není ekvivalentní úprava, podobně jako u rovnic.

Kdy lze nerovnici umocnit přirozeným číslem? Pokud jsou obě strany nezáporné (kladné, nebo nulové). Pak už to bude bez problémů.

Dalším příkladem může být absolutní hodnota, která nám vrací nezáporné číslo.

Úplně stejně jako mocnina se chová i odmocnina. Pokud jsou obě strany nezáporné, můžeme rovnici odmocnit přirozeným odmocnitelem.

Kvadratické nerovnice – příklady k procvičení

a) $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$ $x \in \langle 1, \frac{4}{3} >$

b) $2x^2 - 7x - 15 \leq 0$ $x \in < -\frac{3}{2}, 5 >$

c) Najděte všechny reálná čísla „a“ tak, aby daná rovnice měla kladné řešení:

$4 - a = \frac{2}{x-1}$ $a \in (-\infty, 4) \cup (6, \infty)$

d) Najděte všechny reálná čísla „m“ tak, aby daná rovnice měla kořen > 4

$\frac{3x-1}{m} - 5 = 2x$ $m \in (\frac{11}{9}, \frac{3}{2})$

e) $5(x-1) - x(7-x) \leq x^2$

$x \in < -\frac{5}{2}, \infty >$

f) $(2-3x) - (x-1) \geq -4 - (x-2)^2$

$x \in (-\infty, 4 - \sqrt{5} > \cup < 4 + \sqrt{5}, \infty)$

g) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} \geq 0$ $x \in < 0, 2) \cup < 9, \infty)$

h) $\frac{(5x-4)^2 - (4x-3)^2}{(3x-5)^2} < 1$

$x \in (-\infty, \frac{9}{7})$

Funkce absolutní hodnota

$$f(x) = |x|$$

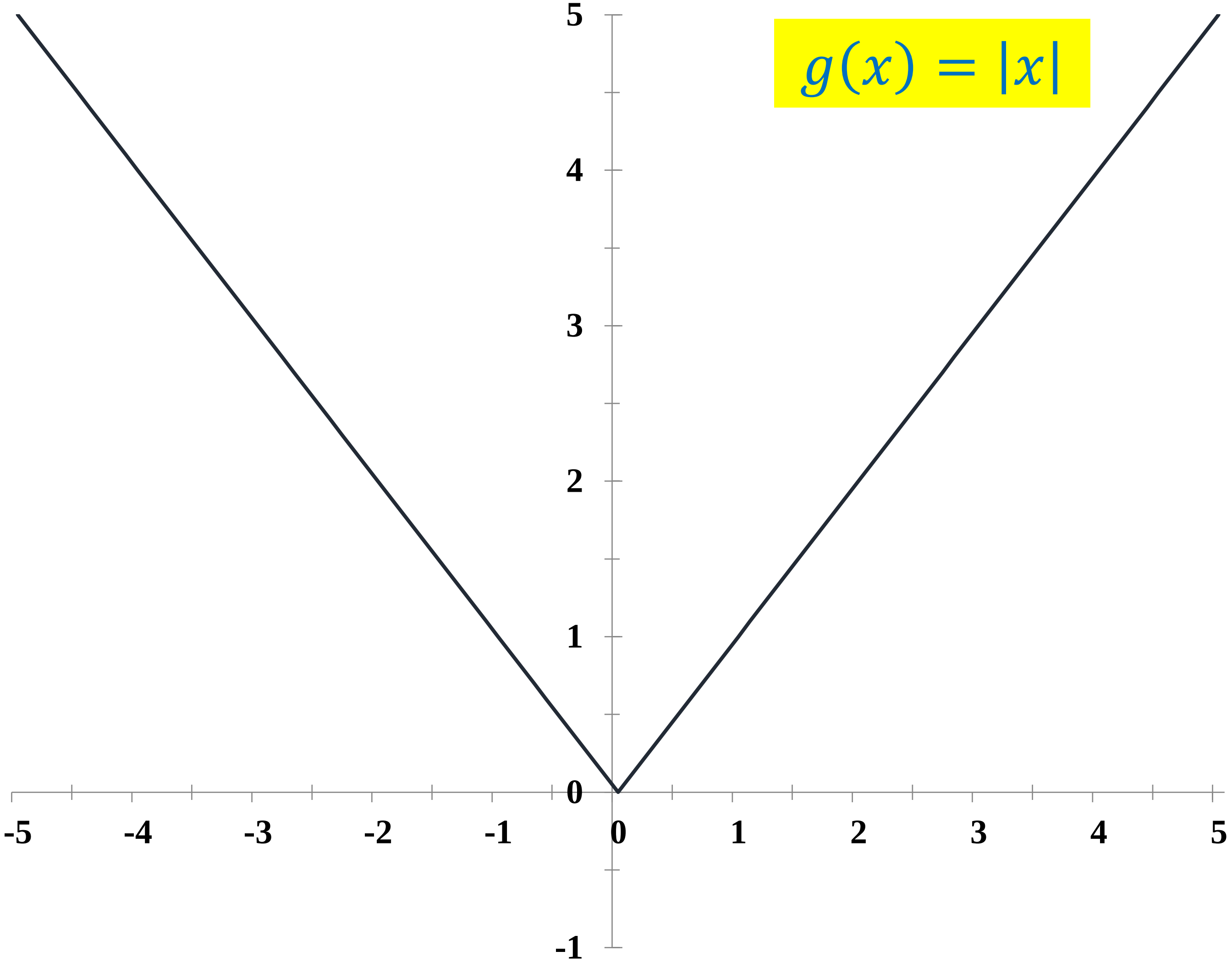
$x \geq 0 \qquad |x| = x$

$x < 0 \qquad |x| = -x$

Příklad 20a.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.



$D(g) = (-\infty, \infty)$,

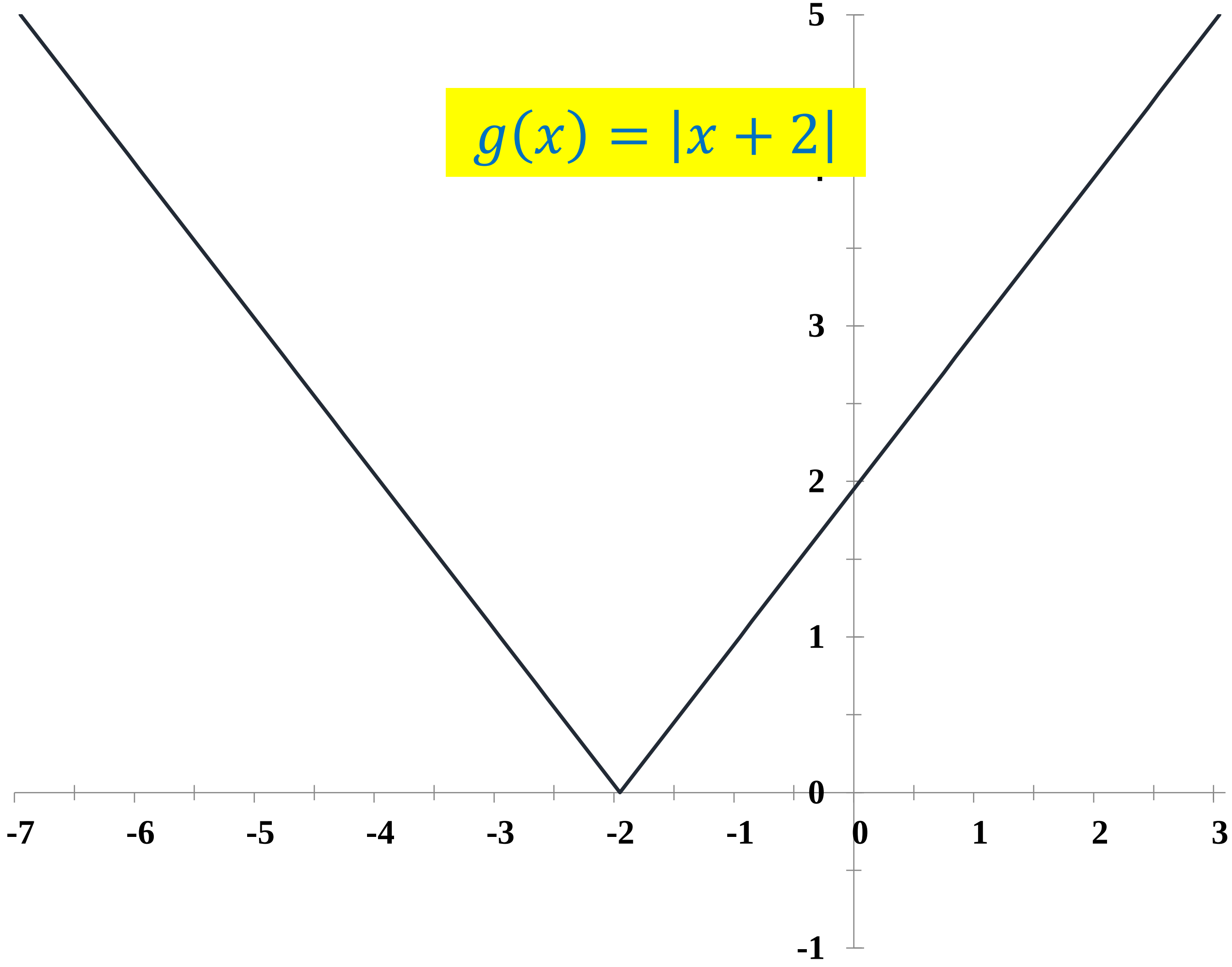
$H(g) = \langle 0, \infty)$.

Příklad 20b.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x + 2|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

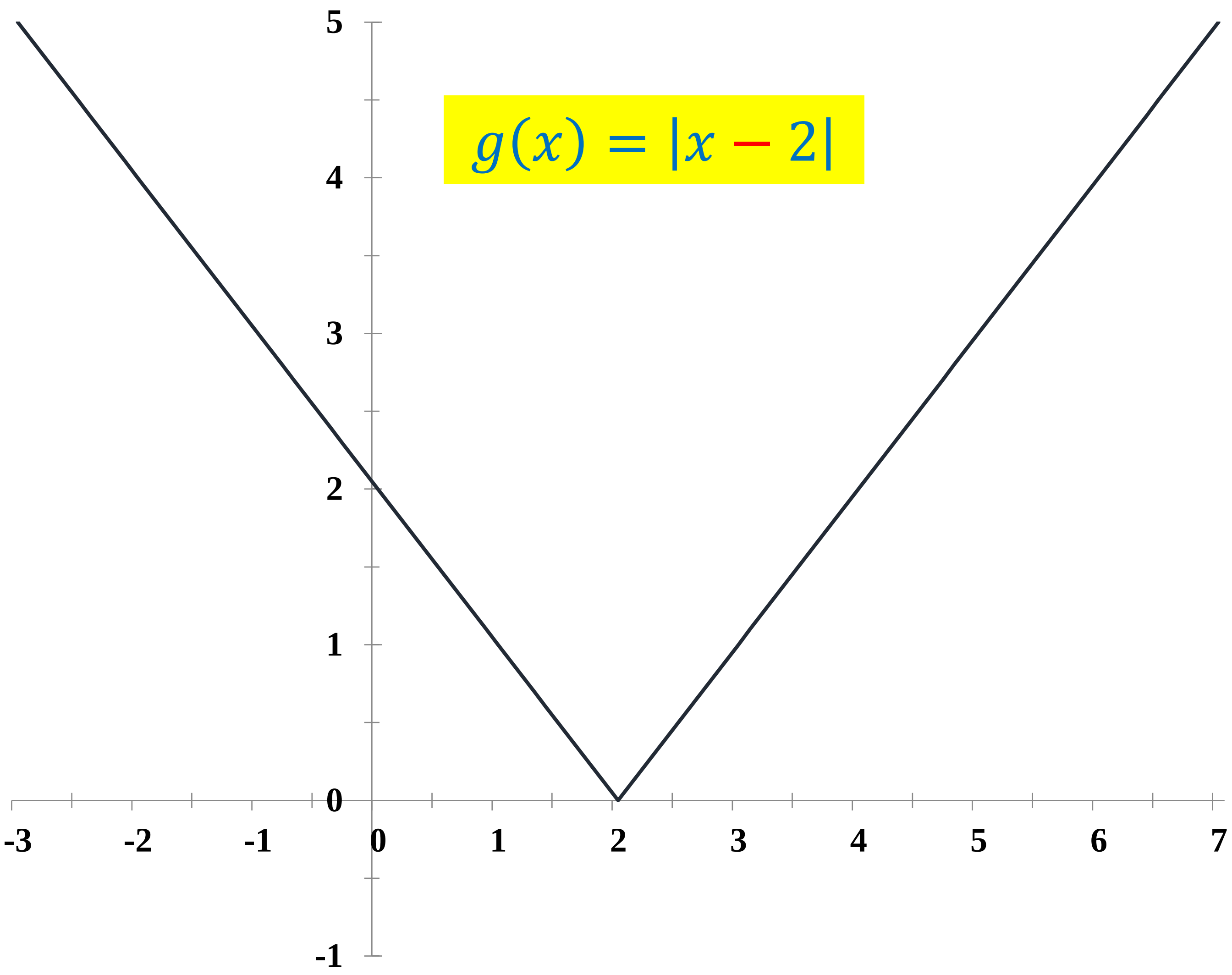
$D(g) = (-\infty, \infty)$,
$H(g) = \langle 0, \infty)$.



Příklad 20c.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x - 2|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.



$D(g) = (-\infty, \infty)$,

$H(g) = \langle 0, \infty)$.

DĚKUJI ZA POZORNOST