

Matematika



1. ročník

08. 12. 2022

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Mnohočleny

Mnohočleny

Výraz $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,

kde $a_n \neq 0$ nazýváme **polynom** (mnohočlen) n -tého stupně

$a_n, a_{n-1}, \dots$ se nazývají **koeficienty**, a_0 je **absolutní člen**.

Sčítání (odčítání) polynomů a násobení reálným číslem se provádí člen po členu:

$$\begin{aligned} 2. (0,5x^2 + x - 3) + (1,5x^2 + 2,5) &= \\ &= x^2 + 2x - 6 + 1,5x^2 + 2,5 = 2,5x^2 + 2x - 3,5 \end{aligned}$$

Násobení polynomů mezi sebou se provádí „*každý s každým*“. Každý člen jednoho polynomu se násobí s každým členem druhého polynomu a vše se sečte.

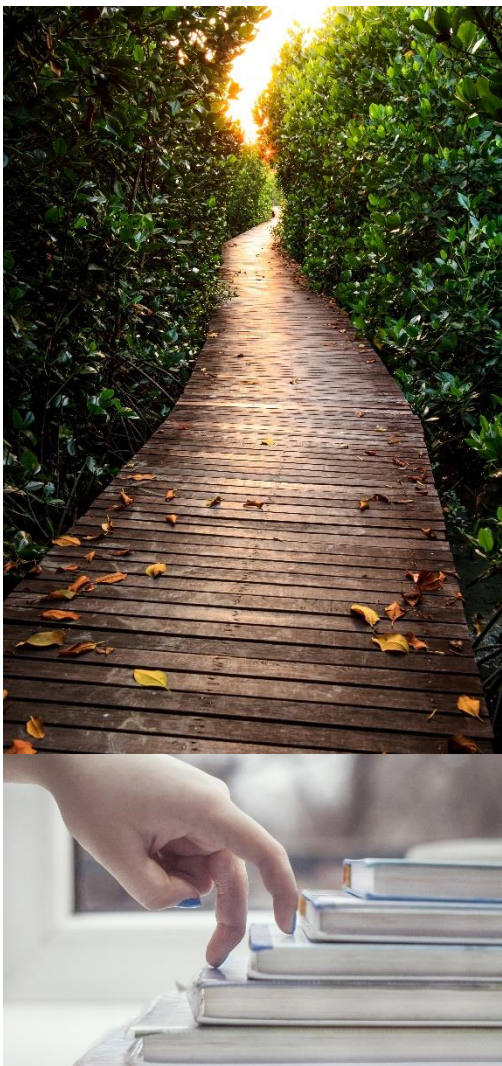
$$\begin{aligned} (0,5x^2 + x - 3) \cdot (1,5x^2 + 2,5) &= \\ &= 0,75x^4 + 1,25x^2 + 1,5x^3 + 2,5x - 4,5x^2 - 7,5 = \\ &= 0,75x^4 + 1,5x^3 - 3,25x^2 + 2,5x - 7,5 \end{aligned}$$

Vytýkání před závorku (opačný proces k násobení číslem):

$$9x^3 + 12x^2 - 1,5x + 3 = 3 \cdot (3x^3 + 4x^2 - 0,5x + 1)$$



Vzorce pro mnohočleny



Umocňování polynomů

(podle definice mocniny nebo rychleji podle vzorce):

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

Kromě předchozích operací je důležitý **rozklad na součin**, a to buď vytýkáním nebo podle vzorce. Kromě vzorců pro umocňování použitých v obráceném směru se používají vzorce:

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \mp AB + B^2)$$

Použití např. **usměrňování**, zbavení se odmocniny ve jmenovateli:

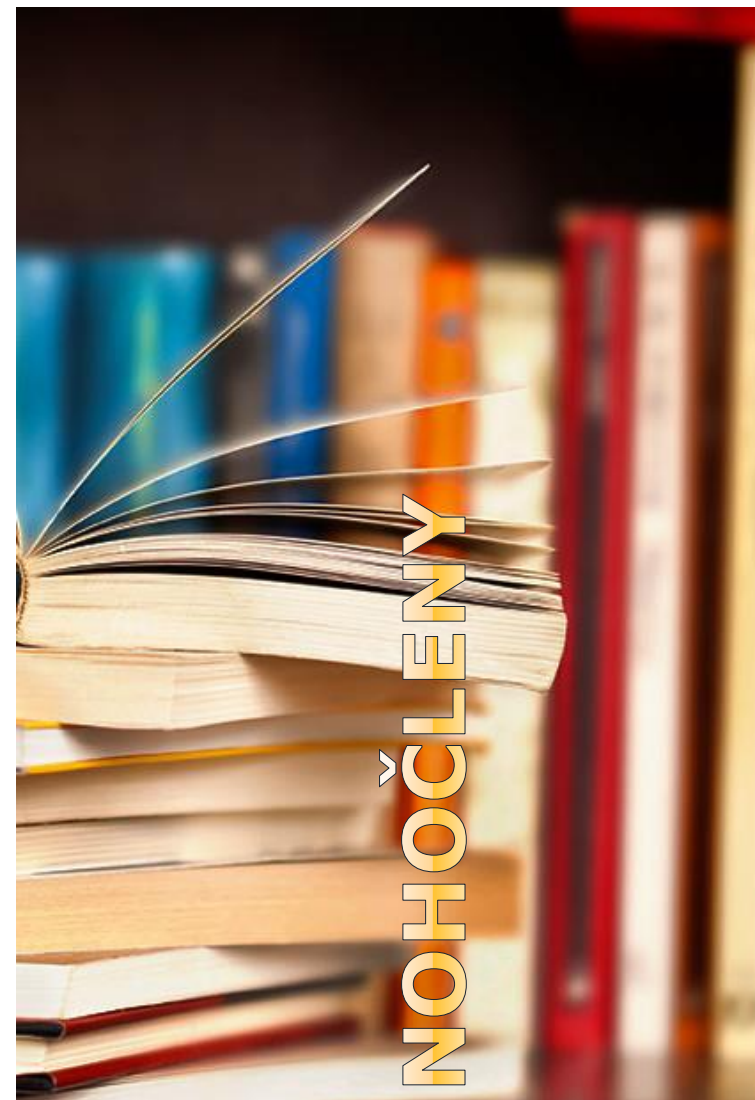
$$\frac{1}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Upravte, zjednodušte:

$$\begin{aligned} a^2(c - 3a) - \{c^2(a + 3c) - [c(3c^2 + ac - a^2) + 2a^3]\} = \\ (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) = \\ (a - 1)^2 - 4(a + 1)^2 - 6(a + 1)(a - 1) = \end{aligned}$$

Rozložte na součin:

$$\begin{aligned} (4 + x)(2x - 3) - (2x - 3)^2 - 5(3 - 2x)(x + 1) = \\ 5am - an - 15dm + 3dn = \quad 2x^2 - 5x + 2 = \\ x^3 + x^2 - x - 1 = \quad 1 - x^4 = \\ 4(a + b)^2 - 9(a - b)^2 = \quad 3x^4 + 3x^2 - 6 = \\ -9x^2 + 30x - 25 = \quad x^4y^4 + 6x^2y^2 - 7 = \\ 49b^2 - 4a^2 + 20a - 25 = \quad 27 + 8a^3 = \end{aligned}$$



MNOHOČLENY

Lomené výrazy



Lomené výrazy jsou výrazy složené ze zlomků, kde se v čitateli i jmenovateli vyskytují polynomy různého stupně, cílem pak je celý výraz zjednodušit.

Součástí úprav je i určení podmínek, za kterých má výraz smysl.

Upravte výraz a určete podmínky existence výrazu

$$\begin{aligned}
 \left(a - \frac{b^2}{a}\right) : \frac{ab^2 + b^3}{ab} + 1 &= \frac{a^2 - b^2}{a} : \frac{b^2 \cdot (a + b)}{ab} + 1 = \\
 &= \frac{(a - b) \cdot (a + b)}{a} \cdot \frac{ab}{b^2 \cdot (a + b)} + 1 = \frac{(a - b)}{1} \cdot \frac{1}{b} + 1 = \\
 &= \frac{a - b}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a - b + b}{b} = \boxed{\frac{a}{b}}
 \end{aligned}$$

$a \neq 0$
 $b \neq 0$
 $a \neq -b$

Upravte výraz a určete podmínky

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{y}{1-x} - \frac{y}{1+x} + \frac{y}{1-x^2} \right) : \frac{x-1}{1-x} = \\
 & = \left(\frac{y}{1-x} - \frac{y}{1+x} + \frac{y}{(1-x)(1+x)} \right) : \frac{-(1-x)}{1-x} = \\
 & = \frac{y(1+x) - y(1-x) + y}{(1-x)(1+x)} : (-1) = \\
 & = \frac{y + yx - y + yx + y}{1-x^2} : (-1) = \frac{2yx + y}{1-x^2} : (-1) = \\
 & = \frac{y(2x+1)}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

$$x \neq \pm 1$$



Lomené výrazy

Upravte lomené výrazy, určete podmínky existence.

$$\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right) =$$

$$\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right) =$$

$$\frac{1}{b} \cdot \left[\left(\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1}\right) : \frac{b^2-a^2}{b+1}\right] \cdot (-b^2) =$$

$$\left(\frac{y}{x-y} + 1\right) : \left(\frac{y^2}{y^2-x^2} - 1\right) =$$

$$\left(\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{1+x}{1-9x^2} =$$

$$\left(\frac{x}{4} - 1 + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-2}{4}\right) =$$

$$\left(x + \frac{x^2}{x-1}\right) \cdot \left[\frac{x+1}{2x^2-x} \cdot (1-x)\right] + 1 =$$



Různé typy a cílem je nalézt proměnnou – **kořen** rovnice, po jejímž dosazení nastane rovnost výrazů.

- **Algebraické** – na obou stranách jsou polynomy
- **Nealgebraické** – s goniometrickými funkce, logaritmy

Při hledání řešení se využívá úpravy rovnic, buď **ekvivalentní** (které nezmění počet řešení) nebo **neekvivalentní** (které řešení změnit mohou a jejichž použití vyžaduje **zkoušku**).

- **Ekvivalentní úpravy:**
 - (1) výměna stran rovnice,
 - (2) přičtení libovolného výrazu k oběma stranám,
 - (3) vynásobení obou stran nenulovým výrazem
- **Neekvivalentní úpravy** *např.:* umocnění nebo odmocnění rovnice, logaritmování nebo odlogaritmování

Rovnice v součínovém tvaru

Velmi obvyklý tvar rovnice $V(x) = 0$, kde $V(x)$ je výraz, který lze rozložit na součin jednodušších výrazů:

$$V(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x)$$

Protože součin se rovná nule právě tehdy, když je aspoň jeden z činitelů roven nule, lze tak získat několik jednodušších rovnic:

$$V_1(x) = 0, V_2(x) = 0, V_3(x) = 0$$

Ty lze vyřešit

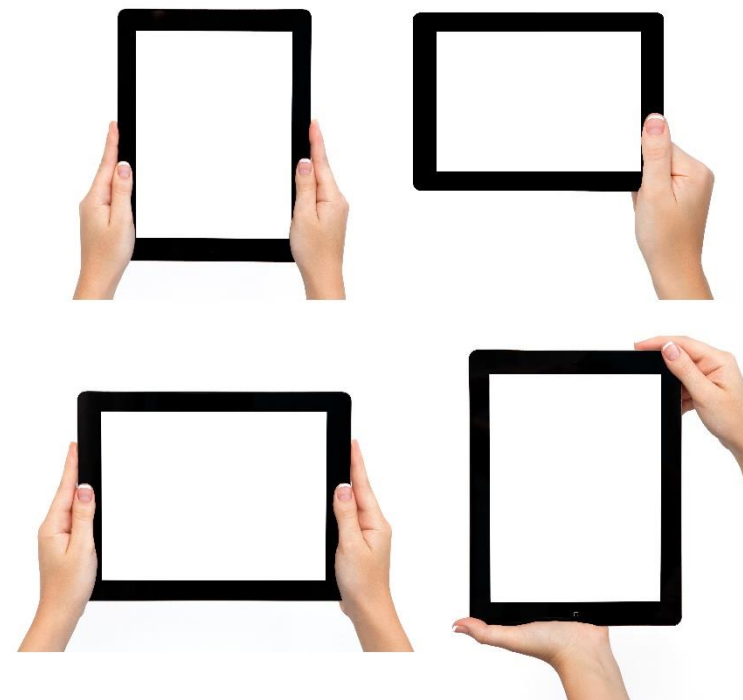
Řešení původní rovnice je sjednocením dílčích řešení.

Příklad $x^3 - 4x = 0$

$$x \cdot (x^2 - 4) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$K = \{0, \pm 2\}$$



Kvadratická rovnice



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Každá kvadratická rovnice má **diskriminant** D , což je číslo, které mimo jiné určuje počet řešení:

$D < 0$ – žádné řešení

$D = 0$ – jedno řešení – dvojnásobný kořen

$D > 0$ – dvě různá řešení

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kvadratický trojčlen lze rozložit na součin:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Pro kvadratický trojčlen dále platí tzv. **Viétovy vztahy**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Úlohy k procvičování

V oboru reálných čísel řešte rovnice v součinném tvaru:

a) $(x + \pi)(x^2 - 2x - 3) = 0$

b) $(3x + 2) \cdot (x\sqrt{2} + 1)(\pi^2 x + \pi) = 0$

c) $(3x^2 + x) \cdot (x + \sqrt{3})(x^2 + 1) = 0$

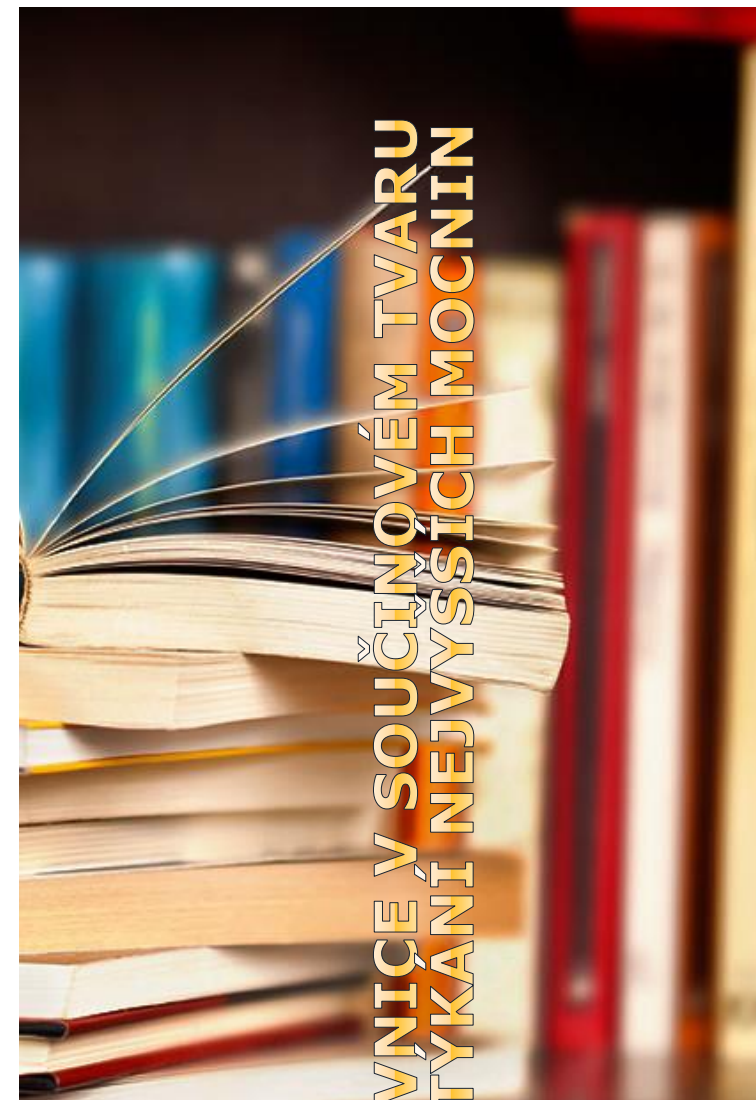
d) $(x\sqrt{2} - x - 1)(\pi x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 - 3) = 0$

e) $x^3 - x^2 = 12x$

f) $(x^4 - 4)(9x^2 - 4)(1 - x^2) = 0$

g) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

h) $(x - 1) \cdot (x + 1) = x + 1$



V oboru reálných čísel řešte rovnice:

$$a) x + \frac{x + 0,4}{3} = 9,8 - \frac{1,8x - 3}{2} - \frac{7 + 1,6x}{6}$$

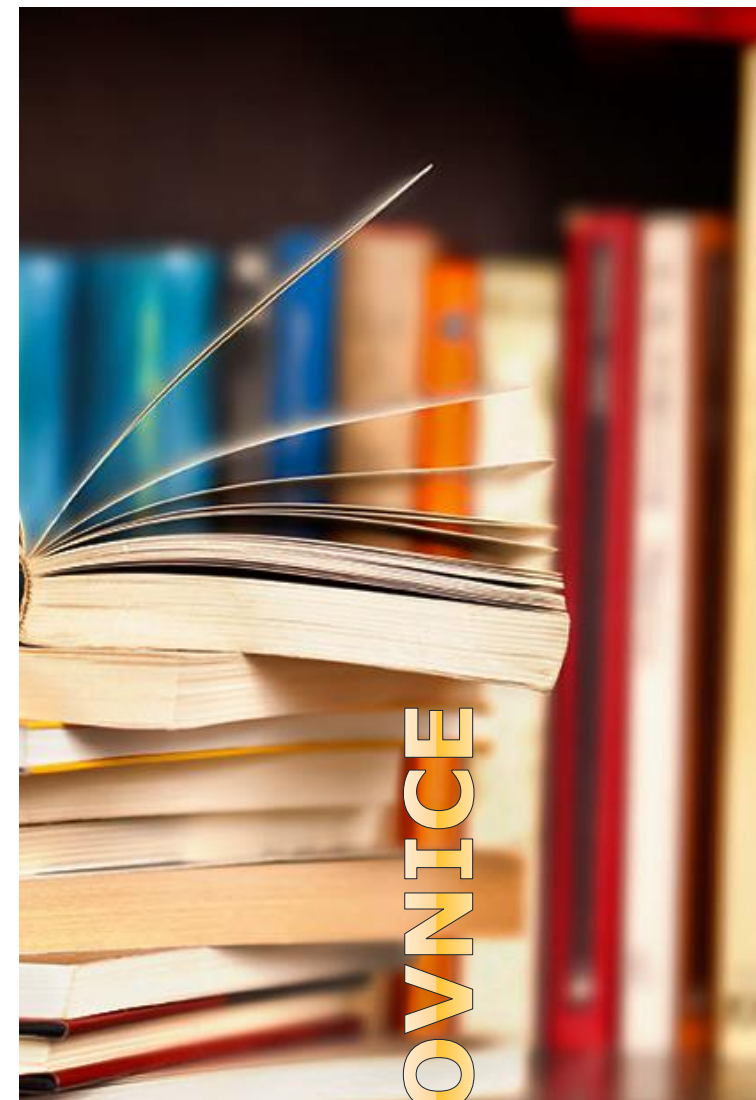
$$b) (x + 2)^2 = 2x^2 - 3x + 6 - x(x - 3)$$

$$c) \frac{3(x+1)}{2} - \left(\frac{x+1}{4} + 1 \right) = \frac{5x+1}{7} - \left(\frac{3x-1}{2} - 3 \right)$$

$$d) \frac{4}{x^2 - 10x + 25} + \frac{1}{25 - x^2} - \frac{1}{x + 5} = 0$$

$$e) \frac{x + 3}{x - 2} + \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$f) 2\sqrt{\frac{x + 2}{x - 3}} + 3\sqrt{\frac{x - 3}{x + 2}} = 5$$



ROVNICE

V oboru reálných čísel řešte rovnice:

a) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{2-x}{3-x} = \frac{5}{x^2-9}$

b) $2 + \frac{x-2}{x+3} = \frac{3}{x+3} + 3$

c) $\frac{x+3}{4} - \frac{2x-3}{8} = \frac{3}{x+3}$

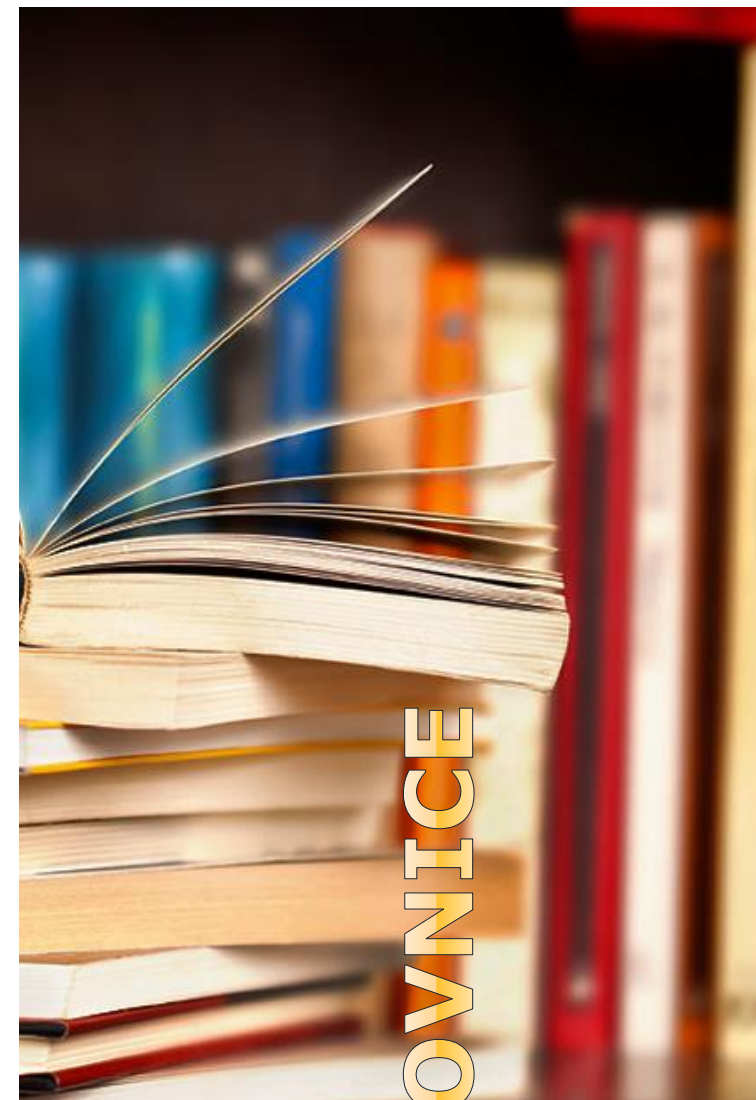
d) $x^2 - 10x + 28 = 0$

e) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$

f) $\frac{x^2-3}{3} = \frac{3}{x^2-3}$

g) $4 + \sqrt{26 - x^2} = x$

h) $\sqrt{4x+8} - 2 = \sqrt{3x-2}$



ROVNICE

$$2 \cdot 10^{-6} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = ? \frac{g \cdot cm^2}{min^2}$$

$$2 \cdot 10^{-6} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{10^3 g \cdot (10^2 cm)^2}{\left(\frac{1}{60} min\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} 10^3 10^4 \frac{g \cdot cm^2}{min^2} 36 \cdot 10^2 = 72 \cdot 10^{-6+3+4+2} \frac{g \cdot cm^2}{min^2} =$$

$$= 72 \cdot 10^3 \frac{g \cdot cm^2}{min^2}$$

Faktoriál čísla n

→ V matematice je faktoriál čísla n (značeno pomocí vykřičníku: $n!$) číslo, rovné součinu všech kladných celých čísel menších nebo rovných n , pokud je n kladné, a rovno 1 pro $n = 0$.

→ Značení $n!$ vyslovujeme jako „ n faktoriál“.

→ $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$0! = 1$$

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
15	1 307 674 368 000

 **DĚKUJI ZA
POZORNOST**