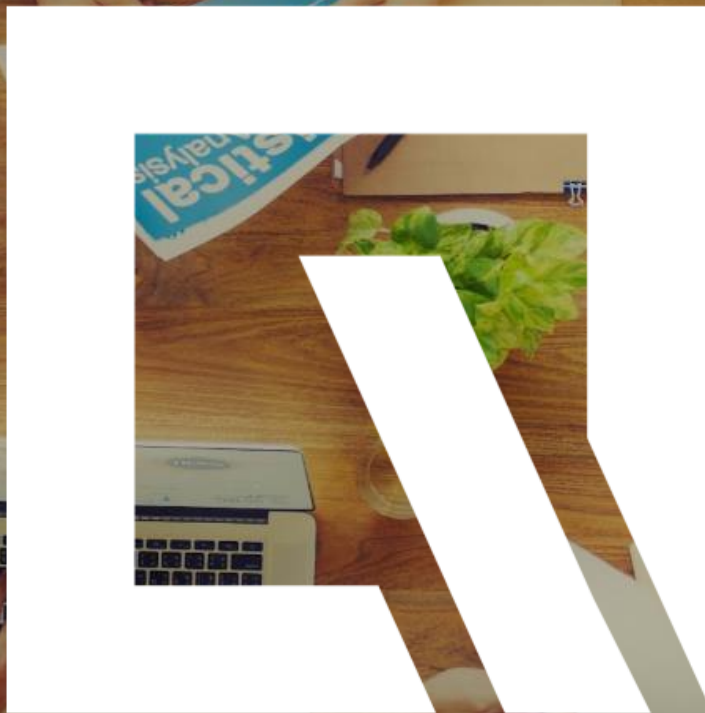


Matematika



1. ročník

02. 12. 2022

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Souhrnné opakování

Souhrnně seznam používaných symbolů a jejich čtení:

$\forall$ – každý, všechna, ...

$\exists$ – existuje

$\in$ – náleží

$\notin$ – nenáleží

$\Rightarrow$ – z toho plyne, implikuje

$\Leftrightarrow$ – právě tehdy ..., když ...

$\cap$ – průnik

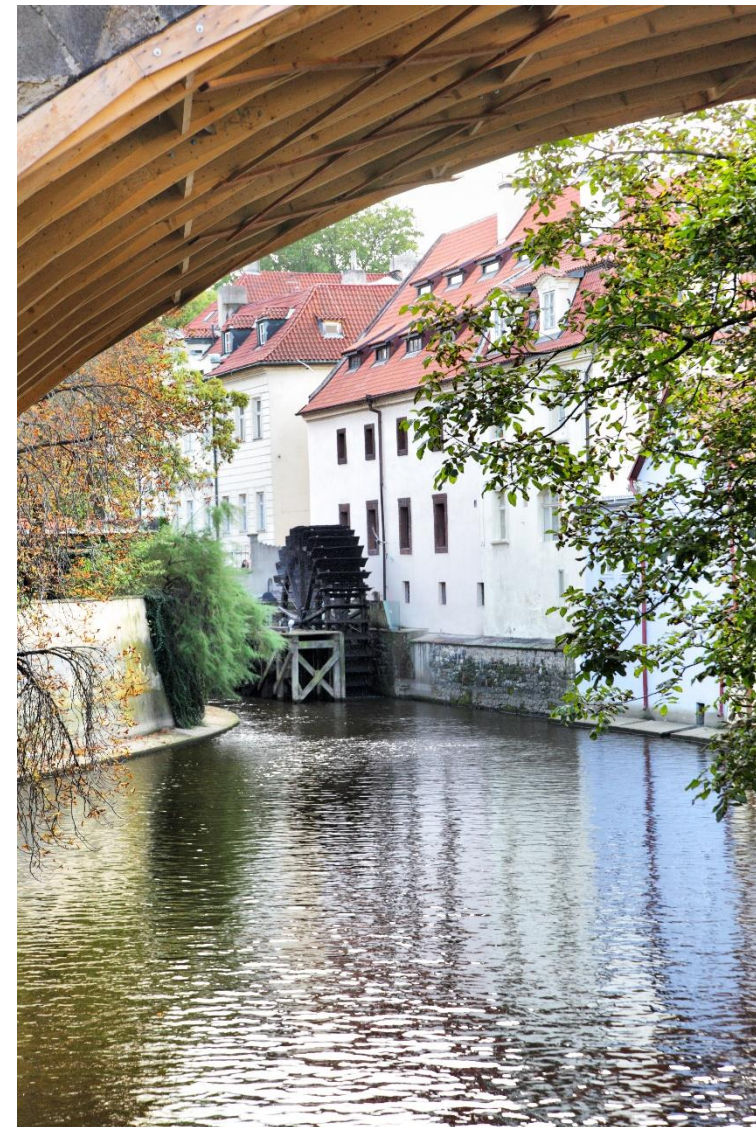
$\cup$ – sjednocení

$\subset$ – je podmnožinou

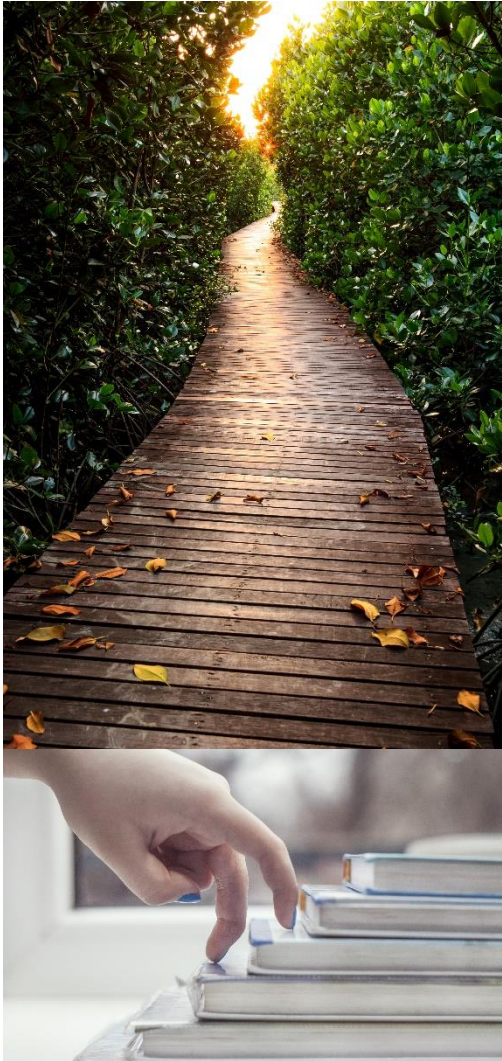
$\not\subset$ – není podmnožinou

$\wedge$ – a zároveň

$\vee$ – nebo



Množiny



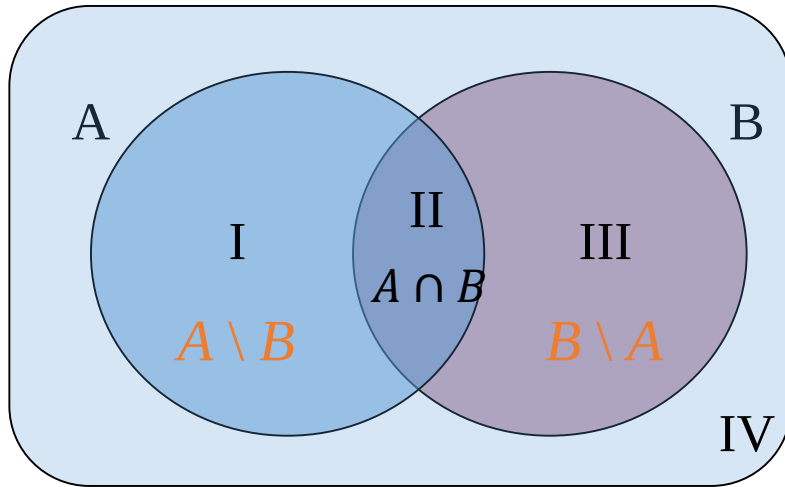
- Množina je soubor prvků dané vlastnosti, většinou se zapisuje:
 $M = \{4, 8, 15, 16, 23, 42\}$, kde je ve složené závorce buď výčet prvků nebo jejich charakteristická vlastnost: $N = \{x \geq 5\}$
- O každém prvku lze rozhodnout, zda do množiny patří, zapisujeme $15 \in M$ nebo nepatří $17 \notin M$
- Pokud množina žádné prvky nemá, je prázdná $K = \emptyset$ *nebo* $K = \{ \}$
- Množina M může být podmnožinou jiné množiny L , pokud všechny prvky z M patří i do L .

$$M = \{3, 5\}, L = \{1, 2, 3, 4, 5\}, J = \{1, 2, 5\}$$

Platí:

$$M \subset L, J \subset L, J \not\subset M, L \not\subset M, \dots$$

Množinové operace



- Základní množina U je rozdělena na 4 pole, která jsou očíslována I, II, III, IV.

- Pole I = množina všech prvků U , které patří do A a zároveň nepatří do B .

ROZDÍL množin A a B , v tomto pořadí neboli A minus B
značení $A \setminus B$ nebo $A - B$

- Pole II = množina všech prvků U , které patří do A a zároveň do B .

PRŮNIK množin A a B , – značení $A \cap B$

- Pole III = množina všech prvků U , které patří do B a zároveň nepatří do A .

ROZDÍL množin B a A , v tomto pořadí neboli
 B minus A – značení $B \setminus A$ nebo $B - A$

- Pole IV = množina prvků U , které nepatří do A ani do B

DOPLNĚK

- Pole I+II+III = množina všech prvků U , které patří do A nebo do B

SJEDNOCENÍ množin A a B – značení $A \cup B$

Číselné obory – stručný přehled

- **Přirozená čísla N** vyjadřují počty prvků konečných množin, počty nedělitelných objektů. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Někdy se množině N přidává nula: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- **Celá čísla Z** obsahují nulu, přirozená čísla a čísla k nim opačná: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

- **Racionální čísla Q** jsou všechna čísla, která lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$ kde p je číslo celé a q je číslo přirozené.

- **Reálná čísla R** vyjadřují délky křivek, plochy obrazců, objemy těles a hodnoty reálných funkcí.

- **Komplexní čísla C** jsou složena z reálné a imaginární části.

$$C = \{a + bi : a, b \in R\}, i^2 = -1$$



Vlastnosti číselných oborů



$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

- Tedy každé celé číslo je zároveň i číslem reálným, ale obráceně to neplatí, např. číslo π je reálné, ale není celé.
- Reálná čísla, která nejsou racionální se nazývají **iracionální**.
- Uzavřenost číselné množiny vzhledem k operacím
Pokud provedeme číselnou operaci se dvěma čísly z nějaké číselné množiny, je výsledek z téže množiny.
- N je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení, ale není uzavřená vzhledem k odčítání ani dělení.
- Z je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení a odčítání, ale ne vzhledem k dělení.
- Q, R, C jsou uzavřené vzhledem ke všem operacím.

Pozn.: nulou se dělit nedá!

Vlastnosti číselných oborů

KOMUTATIVNOST operace

Při provádění početní operace **nezáleží** na pořadí čísel.

- sčítání a násobení jsou komutativní
- odčítání a dělení nejsou komutativní

Symbolický zápis: $\forall a, b \in R : (a + b = b + a) \wedge (a \cdot b = b \cdot a)$

ASOCIATIVNOST operace

Při provádění početní operace se třemi čísly lze libovolně „přezávorkovat“, **nezáleží** na pořadí provedení.

- sčítání a násobení jsou asociativní
- odčítání a dělení nejsou asociativní

Symbolický zápis:

$\forall a, b, c \in R : (a + b) + c = a + (b + c) \wedge (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$



Vlastnosti číselných oborů



EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU

Pro neutrální prvek platí: $\exists n \in R : \forall a \in R : n * a = a * n = a$

Pozn.: Hvězdička zastupuje nějakou operaci.

- Sčítání má neutrální prvek číslo **0** (od $\mathbb{Z}$ dále)
- Násobení má neutrální prvek číslo **1** (všechny obory)
- Odčítání a dělení neutrální prvky nemají.

Pomocí neutrální prvku se definují **INVERZNÍ PRVKY**:

- **OPAČNÉ ČÍSLO** $-a \dots a + (-a) = 0$
- **PŘEVŘÁCENOU HODNOTU** $\frac{1}{a} \dots \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Pokud to v dané číselné množině lze.

DISTRIBUTIVNOST NÁSOBENÍ vzhledem ke SČÍTÁNÍ

Platí „roznásobení závorek“ $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Uspořádání v číselných množinách

OSTRÉ $x < y$

NEOSTRÉ $x \leq y$

Pro **ostré** uspořádání platí:

➤ **TRICHOTOMIE** – pro $\forall x, y \in R$ platí právě jedna z možností: $x < y, x = y, x > y$

$$\forall x, y, z \in R : (x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z)$$

TRANZITIVITA

Podle uspořádání s číslem 0 se reálné číslo x nazývá:

- **kladné** $x > 0$
- **záporné** $x < 0$
- **nezáporné** $x \geq 0$
- **nekladné** $x \leq 0$



Absolutní hodnota



→ Absolutní hodnota $x \in R$ je: $|x| = \begin{cases} x, & \text{pro } x \geq 0 \\ -x, & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

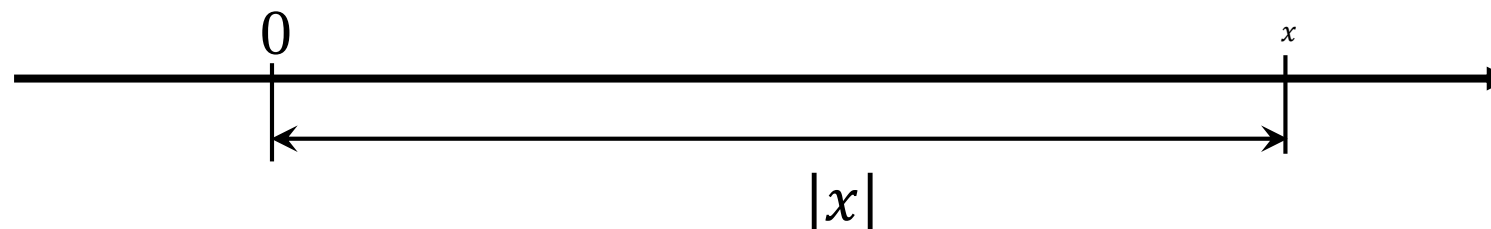
Platí: $\forall x, y \in R$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{Trojúhelníková nerovnost}$$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM absolutní hodnoty je vzdálenost od nuly na číselné ose.



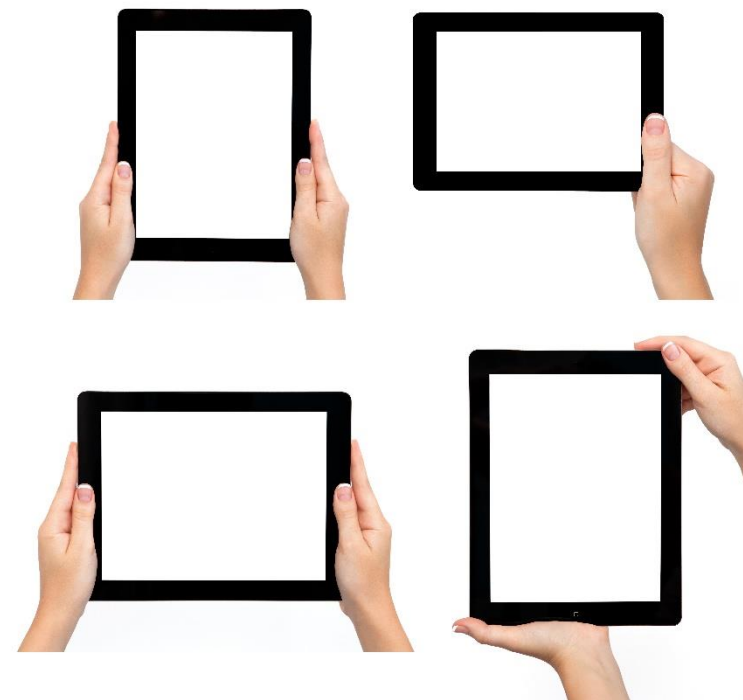
Absolutní hodnota - příklady

a) $|(-8) \cdot (-6) \cdot (-0,5)| : |(-0,002) \cdot (-100)| =$

b) $|14,5 - 0,5 - 4| \cdot |(-0,006)| - \left| -\frac{2}{200} \right| =$

c) $\frac{|4,8 - 8| + |10 - 5,6|}{2} - \frac{5 \cdot |-0,20| - 5}{|4|} =$

d) $\left| \frac{4}{9} - \frac{1}{5} \right| : \left| -\frac{22}{15} \right| - \left(-\left| -\frac{21}{28} \right| : \left| \frac{18}{16} \right| \right) =$



Absolutní hodnota – řešení příkladů



$$\text{a) } |(-8) \cdot (-6) \cdot (-0,5)| : |(-0,002) \cdot (-100)| = 24 : 0,2 = 120$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |14,5 - 0,5 - 4| \cdot |(-0,006)| - \left| -\frac{2}{200} \right| &= |10| \cdot 0,006 - \frac{1}{100} = \\ &= 10 \cdot 0,006 - 0,01 = 0,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{|4,8 - 8| + |10 - 5,6|}{2} - \frac{5 \cdot |-0,20| - 5}{|4|} &= \frac{3,2 + 4,4}{2} - \frac{1-5}{4} = \\ \frac{7,6}{2} - \frac{-4}{4} &= 4,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left| \frac{4}{9} - \frac{1}{5} \right| : \left| -\frac{22}{15} \right| - \left(- \left| -\frac{21}{28} \right| : \left| \frac{18}{16} \right| \right) &= \frac{20-9}{45} : \frac{22}{15} - \left(-\frac{21}{28} : \frac{18}{16} \right) = \\ &= \frac{11}{45} \cdot \frac{15}{22} + \frac{21}{28} \cdot \frac{16}{18} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Podmnožiny reálných čísel

INTERVALY jsou podmnožiny R s krajními body a, b :

→ otevřený $(a, b) = \{\forall x \in R : a < x < b\}$

→ uzavřený $\langle a, b \rangle = \{\forall x \in R : a \leq x \leq b\}$

→ polouzavřený $(a, b] = \{\forall x \in R : a < x \leq b\}$

→ polootevřený $\langle a, b \rangle = \{\forall x \in R : a \leq x < b\}$

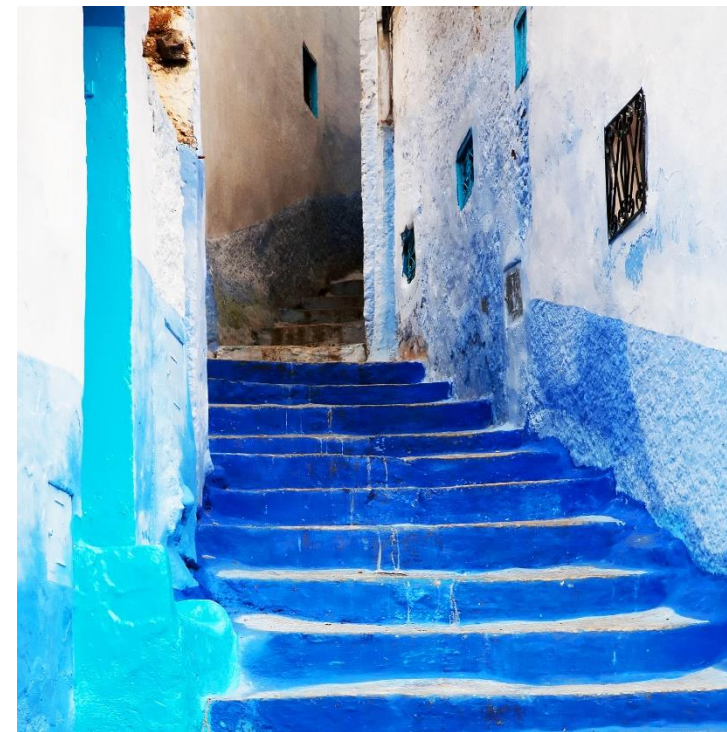
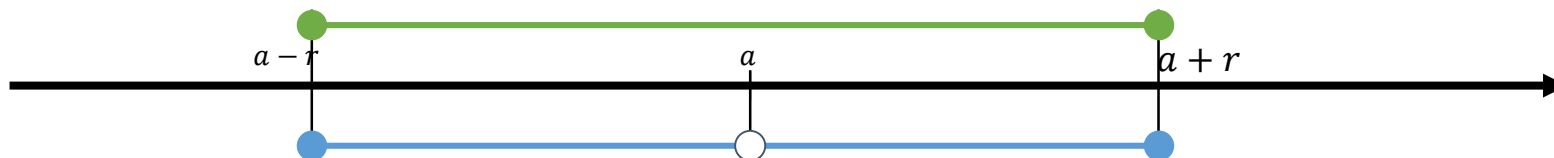
Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme **vnitřní**.

OKOLÍ BODU $a \in R$ o poloměru $r > 0$ je definováno:

$$U(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU $a \in R$ o poloměru $r > 0$ je:

$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = \{x \in R : 0 < |x - a| < r\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)$$





ROZŠÍŘENÁ MNOŽINA REÁLNÝCH ČÍSEL je

$R^* = \bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ tedy, když k R jsou přidána „nekonečna“

$-\infty < x < \infty$ Platí:

$$|-\infty| = |+\infty| = +\infty$$

Počítání s ∞ : $+\infty \pm a = +\infty$

$$-\infty \pm a = -\infty$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$-\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

Neurčité výrazy, nelze u nich určit hodnotu, nejsou definovány:

$$\infty - \infty = ?$$

$$0 \cdot \infty = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$

Úlohy k procvičení

- Jsou dány čtyři podmnožiny množiny přirozených čísel N . Proved'te jejich průniky, sjednocení, oboustranné rozdíly a doplňky do základní množiny.
- $$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$
- $$B = \{x \in N, x \leq 16\}$$
- $$C = \{x \in N, x > 10\}$$
- $$D = \{x \in N, 4 \leq x \leq 8\}$$
- Jsou dány tři podmnožiny množiny reálných čísel R . Zakreslete je číselnou osu. Proved'te jejich průniky, sjednocení, oboustranné rozdíly a doplňky do základní množiny.
- $$I = \{x \in R, |x + 2| > 2\}$$
- $$J = \{x \in R, |x - 7| \geq 1\}$$
- $$K = \langle 6, 8 \rangle$$
- Jsou dána okolí bodů, zakreslete je na číselnou osu, запиšte pomocí sjednocení intervalů a množinovým zápisem a najděte jejich doplňky. $U(3, 2), U(2, 3), P(4, 1), P(1, 4)$



Mocniny

Mocniny a odmocniny



Mocnina a^r je součin r stejných činitelů, kde a je základ mocniny, r je exponent (mocnitel)

Pravidla pro počítání s mocninami:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^0 = 1$$

$$0^r = 0$$

$$a^1 = a$$

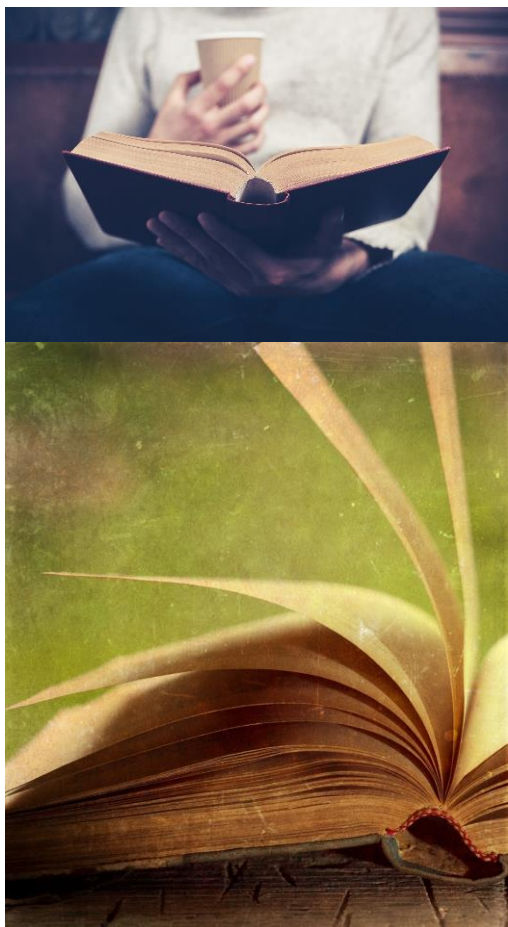
$$1^r = 1$$

Výraz 0^0 není definován.

n -tá odmocnina, kde a je základ odmocniny, n je odmocnitel. Místo pravidel pro odmocniny lze uvést vztah, jak odmocninu převést na mocninu.

$$\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$$

Úlohy k procvičení



Zjednodušte:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}} a^{\frac{1}{2}} =$

b) $\left(a \sqrt[6]{\frac{b^2}{a}} + b \sqrt[6]{\frac{a^2}{b}} \right) \sqrt[6]{a^2 b} =$

c) $\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} - \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} =$

d) $\frac{\left(x^{\frac{2}{3}} y^{-1} z \right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}} =$

e) $\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1 + \frac{2}{\sqrt{2}+1}} =$

f) $\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{5}} =$

g) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - \sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$

h) $\left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} =$

i) $\frac{x+1}{x + \sqrt{x^2 + x}} + \frac{x-1}{x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a^2}}} a^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} a^{-\frac{2}{6}} = a^{\frac{3-4}{12}}$$

$$\text{b) } \left(a^6 \sqrt{\frac{b^2}{a}} + b^6 \sqrt{\frac{a^2}{b}}\right) \sqrt[6]{a^2 b} = a^6 b^1 a^{-\frac{1}{2}} + b^6 a^1 b^{-\frac{1}{2}} = ab(a^{5-\frac{1}{2}} + b^{5-\frac{1}{2}})$$

$$\text{c) } \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a^2+2a\sqrt{b}+b)-(a^2-2a\sqrt{b}+b)}{a^2-b} = \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} y^{-1} z\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} &= \left(x^{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3})} y^{-1 \cdot (-\frac{1}{3})} z^{-\frac{1}{3}}\right) \left(x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{2}{9}} y^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}}\right) \left(x^{\frac{2}{3}} y z^{-\frac{1}{3}}\right) = \\ &= x^{-\frac{2}{9} + \frac{4}{9}} y^{\frac{1}{3} + \frac{3}{3}} z^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{9}} y^{\frac{4}{3}} z^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1 + \frac{2}{\sqrt{2}+1}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right) \left(\sqrt{2}-1 + \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right)^{-1} = \\ & = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - 2 \cdot 2}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{(2-1) - 4}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{-3}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{-3}{2}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \left[\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{1}{2}} a^{-2} a^{-\frac{1}{3}})^{-2 \cdot \frac{1}{5}} = (a^{\frac{3}{6}} a^{-\frac{12}{6}} a^{-\frac{2}{6}})^{-\frac{2}{5}} = a^{-\frac{11}{6} \cdot (-\frac{2}{5})} = a^{\frac{11}{15}}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - \sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \\ & (\sqrt{6} + \sqrt{12}) + (\sqrt{6} + \sqrt{18}) - (\sqrt{12} + \sqrt{18}) = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \\ & = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} &= \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} + \sqrt{ab} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} + \sqrt{ab} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \right) = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} + a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a - b} = \frac{\sqrt{a}(a - b) - \sqrt{b}(a + b)}{a - b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}} + \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}} &= \frac{(x+1)(x-\sqrt{x^2+x}) + (x-1)(x+\sqrt{x^2+x})}{(x+\sqrt{x^2+x})(x-\sqrt{x^2+x})} = \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+x} + x - \sqrt{x^2+x} + x^2 - x\sqrt{x^2+x} - x - \sqrt{x^2+x}}{(x^2 - x^2 - x)} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x\sqrt{x^2+x} - 2\sqrt{x^2+x}}{-x} = \frac{-2x^2 + 2x\sqrt{x^2+x} + 2\sqrt{x^2+x}}{x} \end{aligned}$$

 **DĚKUJI ZA
POZORNOST**