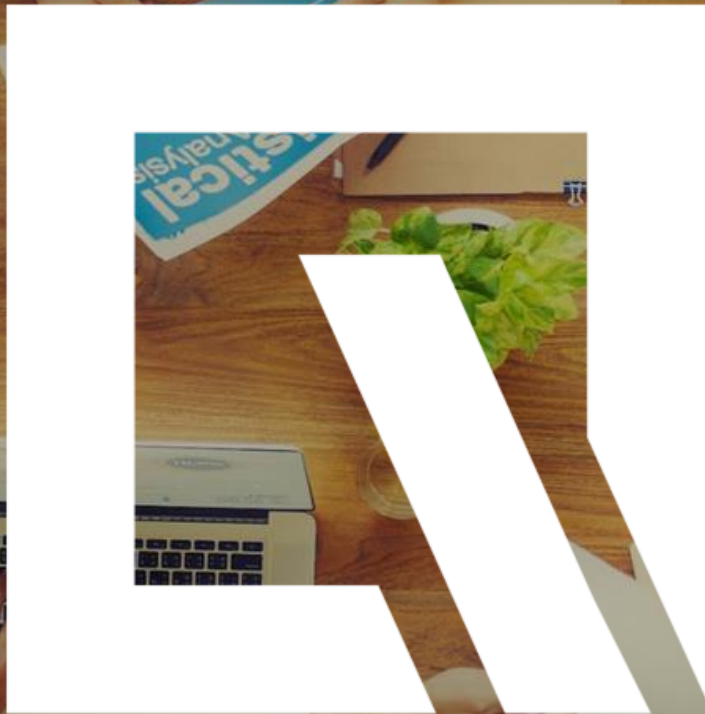


Matematika



1. ročník

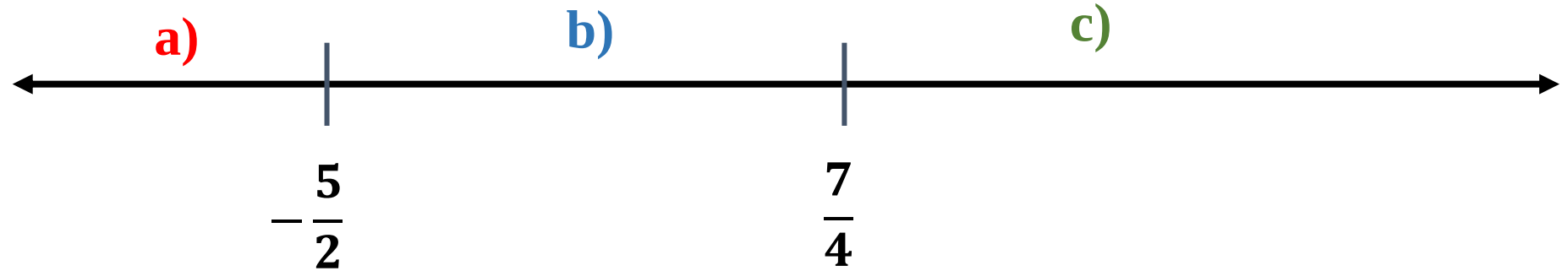
30. 01. 2023

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Podrobný výpočet příkladu f)

$$\text{f) } |4x - 7| + |6x + 15| = 18$$



$$\text{a) } -(4x - 7) + (-1)(6x + 15) = 18$$

$$-4x + 7 - 6x - 15 = 18$$

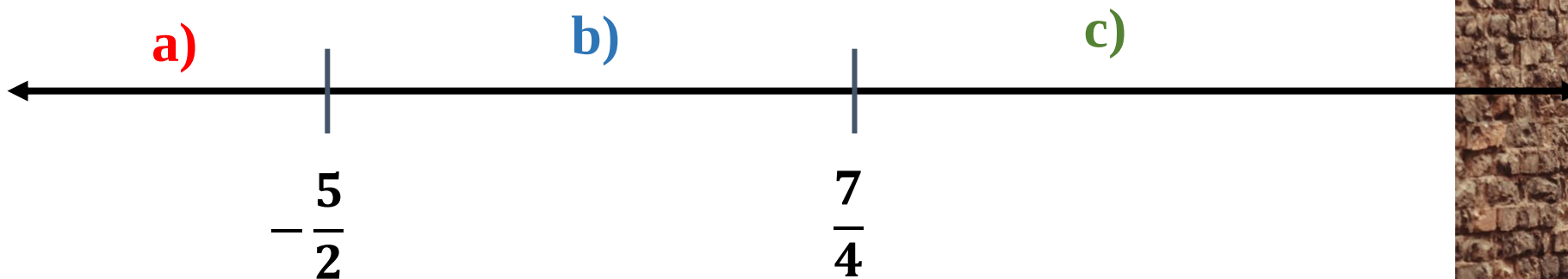
$$-10x - 8 = 18$$

$$-10x = 26$$

$$x = -\frac{13}{5}$$

Podrobný výpočet příkladu f)

f) $|4x - 7| + |6x + 15| = 18$



b) $-(4x - 7) + (6x + 15) = 18$

$$-4x + 7 + 6x + 15 = 18$$

$$2x + 22 = 18$$

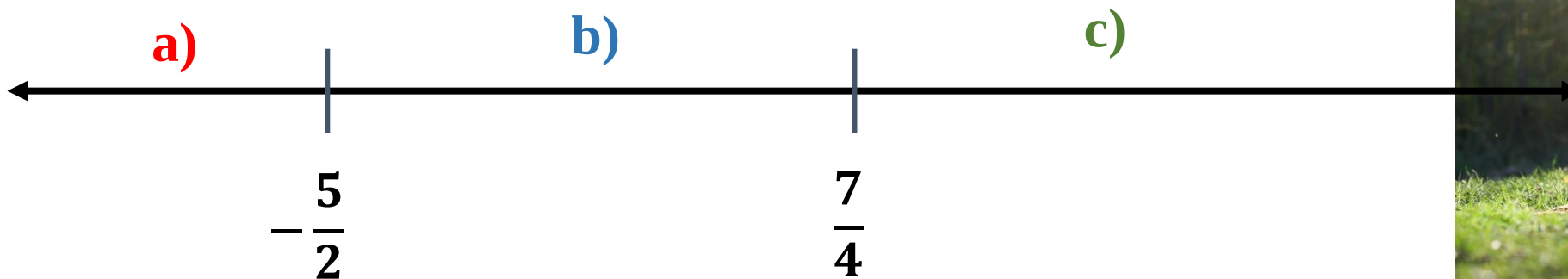
$$2x = -4$$

$$x = -2$$



Podrobný výpočet příkladu f)

f) $|4x - 7| + |6x + 15| = 18$



c) $(4x - 7) + (6x + 15) = 18$

$$4x - 7 + 6x + 15 = 18$$

$$10x + 8 = 18$$

$$10x = 10$$

$$x = 1$$

$$x \in \{\emptyset\}$$

Řešení: $x \in \left\{ -\frac{13}{5}; -2 \right\}$



Rovnice s absolutní hodnotou – příklady

V množině reálných čísel řešte rovnice

- a) $|x| + |x + 2| = 4$ $x \in \{-3; 1\}$ f) $|4x - 7| + |6x + 15| = 18$ $x \in \left\{-\frac{13}{5}; -2\right\}$
- b) $|5 - x| = |x - 1|$ $x \in \{3\}$ g) $|2x + 1| - |2x| + 1 = 2x$ $x \in \{1\}$
- c) $|x + 2| = 4|x - 3|$ $x \in \{2\}$ h) $|x - 5| - |2x + 11| = 6$ $x \in \{-10; -4\}$
- d) $x + |x| = 0$ $x \in (-\infty, 0)$ i) $|x - 3| = |3x + 2| - 1$ $x \in \{-3; 12\}$
- e) $|x - 1| + |x + 2| = 3$ $x \in \langle -2, 1 \rangle$

Funkce jedné proměnné

Funkce absolutní hodnota

$$f(x) = |x|$$

$$x \geq 0 \quad |x| = x$$

$$x < 0 \quad |x| = -x$$

Každému reálnému číslu x je přiřazeno právě jedno číslo $|x|$:

$$|x| = x \text{ pro } x \geq 0,$$

$$|x| = -x \text{ pro } x < 0.$$

Toto číslo $|x|$ se nazývá **absolutní hodnota** reálného čísla x

Geometrický význam absolutní hodnoty:

Číslo $|a|$ odpovídá vzdálenosti obrazu čísla a na číselné ose od počátku.

Některé vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla

Pro každé reálné číslo a, b platí:

$$|a| \geq 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|-a| = a$$

Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$.

Nerovnicí pak rozumíme výrazy v jednom z těchto tvarů:

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

Řešením nerovnice jsou všechny x z (obvykle) množiny **reálných čísel**, pro která je nerovnice splněna.

Příklad nerovnice:

$6x < 12$. Platí, že $f(x) = 6x$ a $g(x) = 12$.

Řešením této nerovnice jsou všechna x , která jsou menší než dva: $x < 2$.

Tedy interval $(-\infty, 2)$.

Záměna stran se změnou znaménka

U rovnic lze bez obav zaměnit pravou stranu za levou.

To u nerovnic nelze udělat.

Například u nerovnice $x < 5$, nemůže zároveň platit $5 < x$.

V prvním případě je x menší než pět, ve druhém je x větší než pět.

Avšak pokud s záměnou stran bude zároveň změněno znaménko nerovnosti, bude se již jednat o ekvivalentní úpravu.

Přičtení výrazu

K nerovnici lze přičíst číslo nebo funkci, která je definovaná na stejném oboru, v jakém oboru nerovnici řešíme.

Příklad: K nerovnici $x > 0$ lze přičíst například číslo tři. Potom získáme nerovnici $x + 3 > 3$.

Podobně lze přičíst celou funkci.

Výraz lze pochopitelně tak odečítat — neboli lze přičíst záporné číslo.

Vynásobení nerovnice kladným výrazem

Nerovnici již nelze vynásobit nějakým výrazem, jako u rovnic.

Platí, že při násobení výrazem, který je vždy kladný, jedná **ekvivalentní úpravu**.

Při násobení **záporným výrazem**, je nutno **změnit znaménko**.

Samozřejmě stejně jako u rovnic nelze násobit nulovým výrazem!

Nelze ale nerovnici jen tak vynásobit proměnnou x , protože obecně proměnná může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot a to je nepřípustné.

Existují však situace, kdy bude x vždy kladné. Například vždy nezáporný výraz je druhá mocnina (za podmínky, že x není rovno nule).

Existuje více funkcí, které jsou vždy kladné.

Umocnění a odmocnění nerovnice přirozeným číslem

Umocnění nerovnice **obecně není ekvivalentní úprava**, podobně jako u rovnic.

Kdy lze nerovnici umocnit přirozeným číslem? Pokud jsou obě strany nezáporné (kladné, nebo nulové). Pak už to bude bez problémů.

Dalším příkladem může být absolutní hodnota, která nám vrací nezáporné číslo.

Úplně stejně jako mocnina se chová i odmocnina. Pokud jsou obě strany nezáporné, můžeme rovnici odmocnit přirozeným odmocnitelem.

Nerovnice s absolutní hodnotou

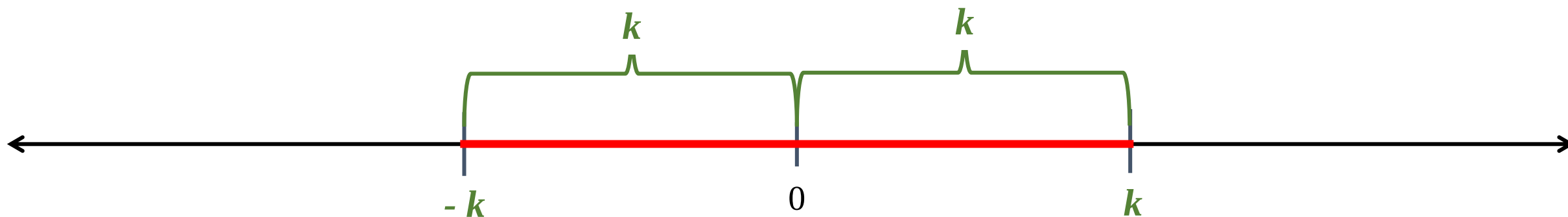
Je-li k **kladné** reálné číslo, pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$|x| < k$$

právě tehdy, když $x \in (-k, k)$.

Geometrický význam předchozí nerovnice $|x - 0| < k$, kde $k > 0$.

Jedná se o nalezení reálných čísel x , jejichž obraz je vzdálen na číselné ose od nuly o méně než k :



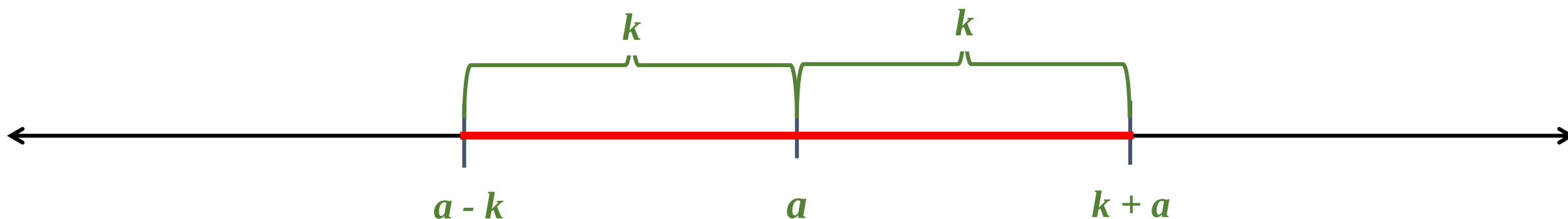
Nerovnice s absolutní hodnotou

Je-li k **kladné** reálné číslo, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$|x - a| < k$$

právě tehdy, když $x \in (a - k, a + k)$

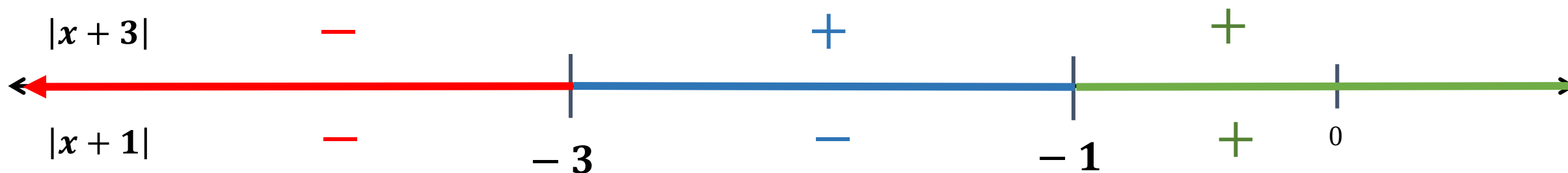
Jedná se o nalezení reálných čísel, pro která platí, že vzdálenost jejich obrazů od obrazu čísla a na reálné ose je menší než k



Řešením nerovnice $|x - a| < k$ je tedy otevřený interval $x \in (a - k, a + k)$

Nerovnice s absolutní hodnotou – Příklad

$$\frac{|x+3|}{|x+1|} \geq 2 \quad x \neq -1 \quad \text{Metoda nulových bodů}$$



$$\text{A) } \frac{|x+3|}{|x+1|} = \frac{-(x+3)}{-(x+1)} \geq 2$$

$$(x+3) < 2(x+1)$$

$$1 < x$$

$$\text{Řešení: } x \in \{\emptyset\}$$

$$\text{B) } \frac{|x+3|}{|x+1|} = \frac{(x+3)}{-(x+1)} \geq 2$$

$$\frac{(x+3)}{(x+1)} < -2$$

$$(x+3) \geq -2(x+1)$$

$$x \geq -\frac{5}{3}$$

$$\text{Řešení: } x \in \{\emptyset\}$$

$$\text{C) } \frac{|x+3|}{|x+1|} = \frac{(x+3)}{(x+1)} \geq 2$$

$$(x+3) \geq 2(x+1)$$

$$1 \geq x$$

$$\text{Řešení: } x \in (-1, 1)$$

Nerovnice s absolutní hodnotou – příklady

- a) $|x - 3| < 2$ $x \in (1, 5)$
- b) $\frac{|2+x|-6}{-3} \geq 2$ $x \in \{-2\}$
- c) $|3 + 5x| + 3 > \frac{7}{4}$ $x \in R$
- d) $4,5 - |3 - x| > \frac{3}{2}$ $x \in (0, 6)$
- e) $|3x - 5| \leq 2x + 10$
 $x \in \langle -1, 15 \rangle$
- f) $|2x + 1| \leq |x - 3|$ $x \in \left\langle -1, \frac{2}{3} \right\rangle$
- g) $|3 - |2 - x|| \leq 2x$ $x \in \langle 1, \infty \rangle$
- h) $|2x + 1| - |3 - x| \geq x$
 $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 1, \infty \rangle$
- i) $\frac{|x+2|}{|x+6|} \geq \frac{|x-1|}{|x-4|}$
 $x \in (-\infty, -6) \cup (-6, -3, 5) \cup \left\langle -\frac{2}{7}, 2 \right\rangle$

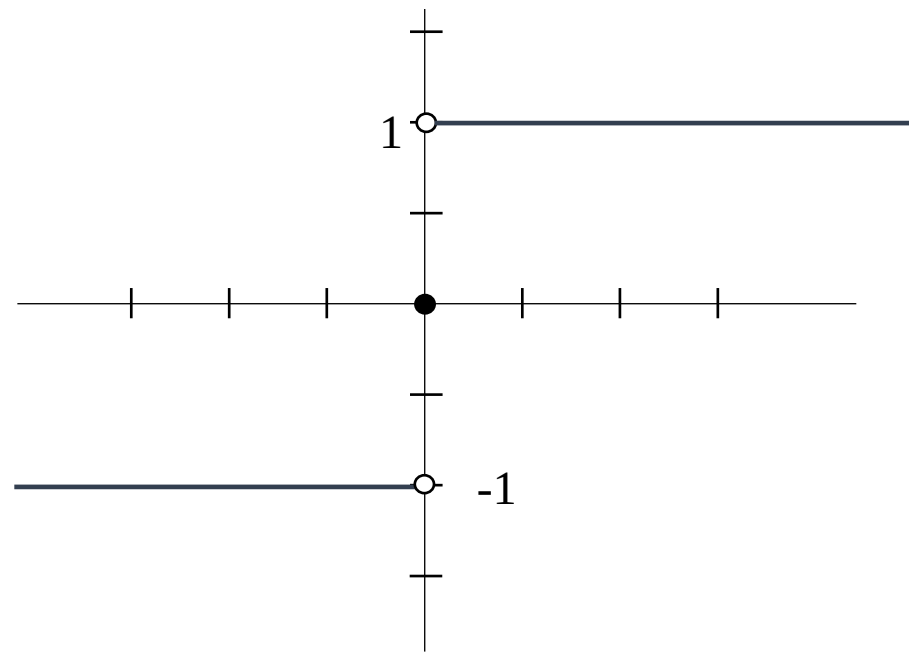
Příklad 3.

Uvažujme funkci signum, která se značí $\operatorname{sgn}(x)$ a je definována předpisem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{jestliže } x = 0, \\ -1, & \text{jestliže } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$D(\operatorname{sgn}) = (-\infty, \infty),$$

$$H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}.$$



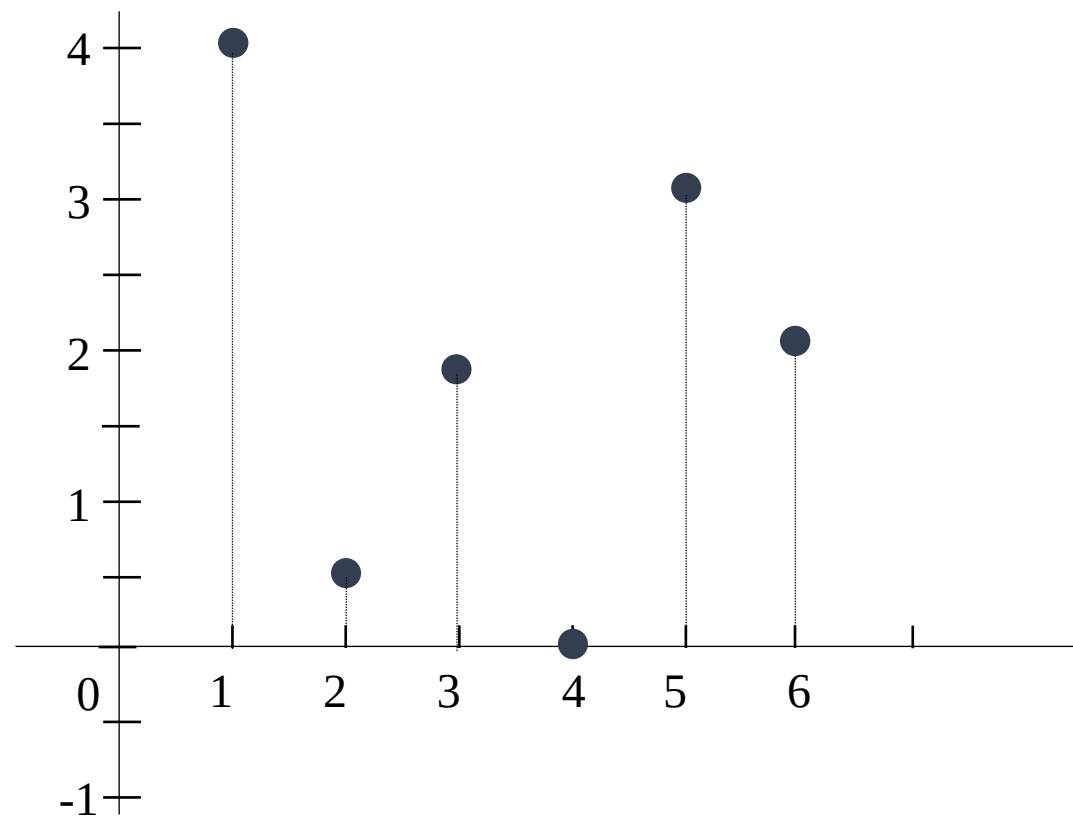
Příklad 4.

Uvažujme funkci $g(y)$, která je definována tabulkou:

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}$	0	3	2

$$D(g) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

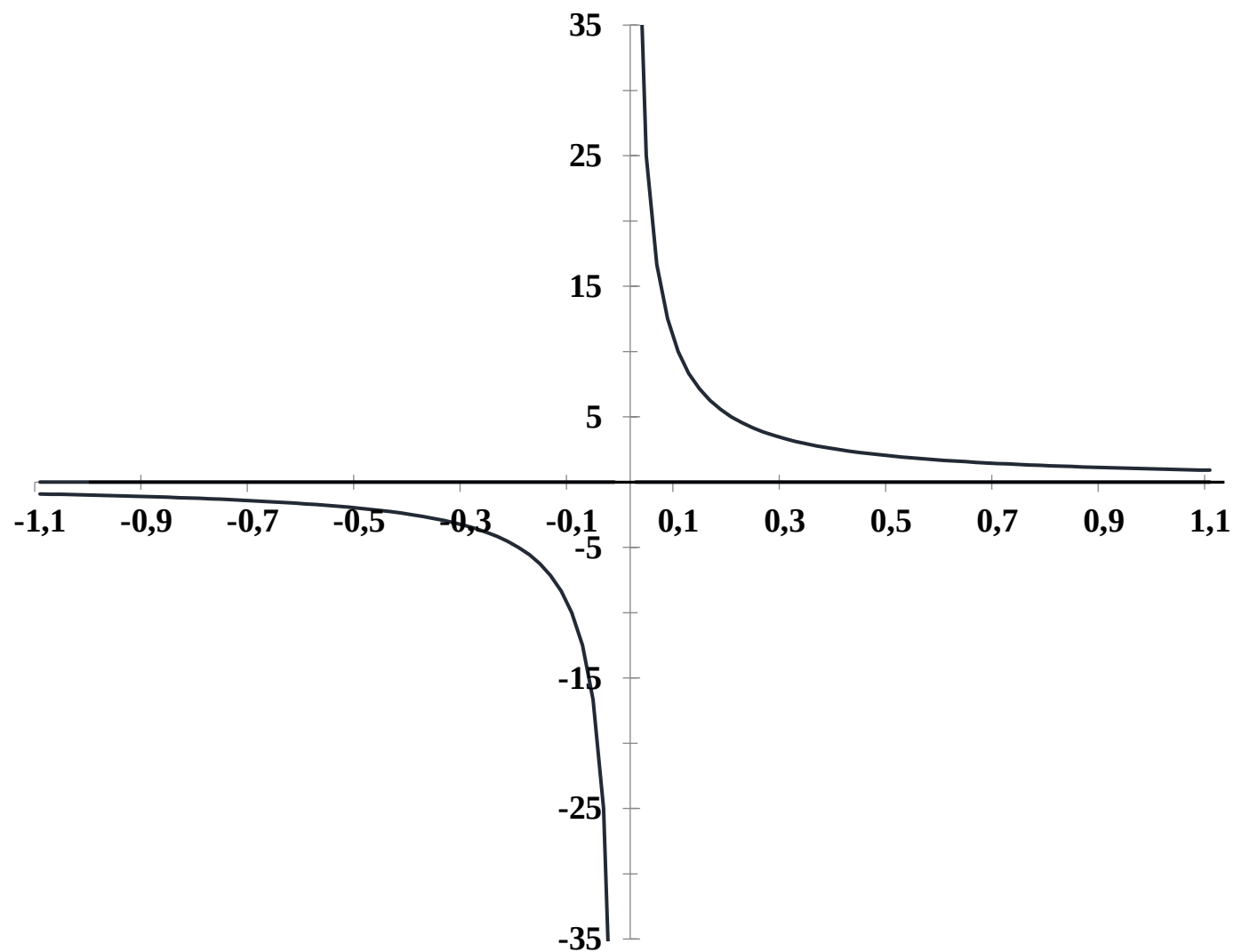
$$H(g) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{8}{5}, 2, 3, 4\right\}.$$



Příklad 5.

Je zobrazená křivka grafem funkce?

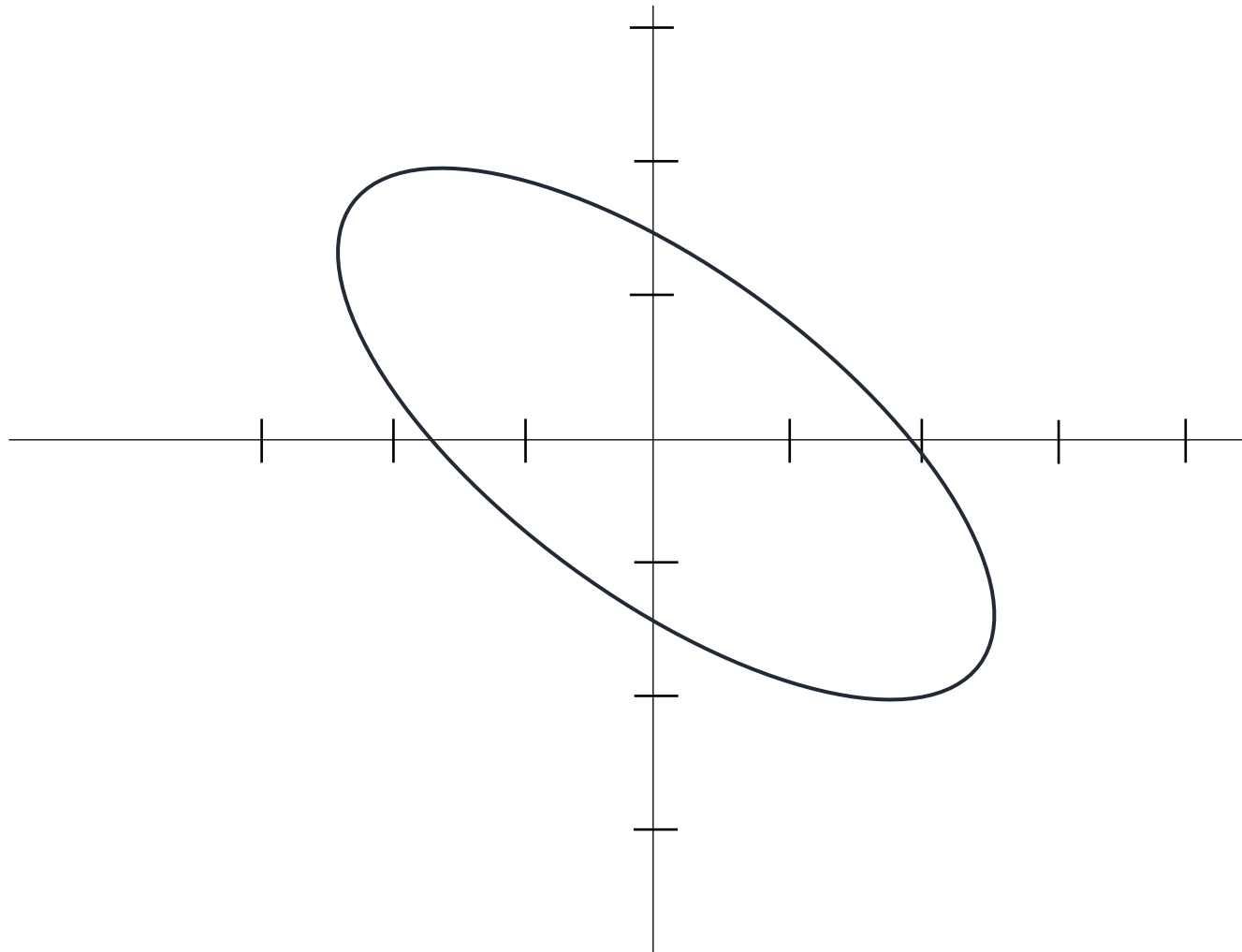
Jde o graf funkce.



Příklad 6.

Je zobrazená křivka grafem funkce?

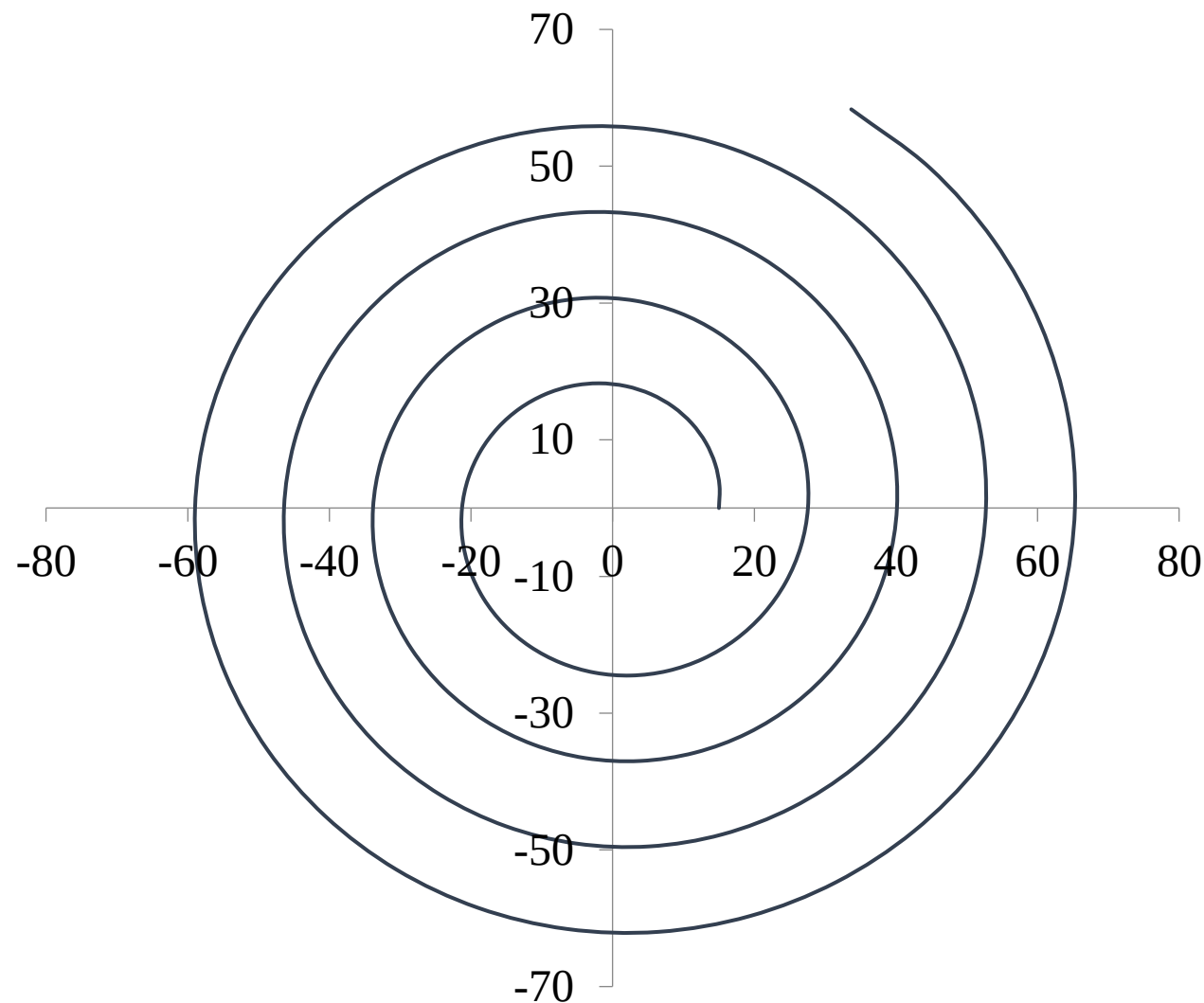
Nejde o graf funkce.



Příklad 7.

Je zobrazená křivka grafem funkce?

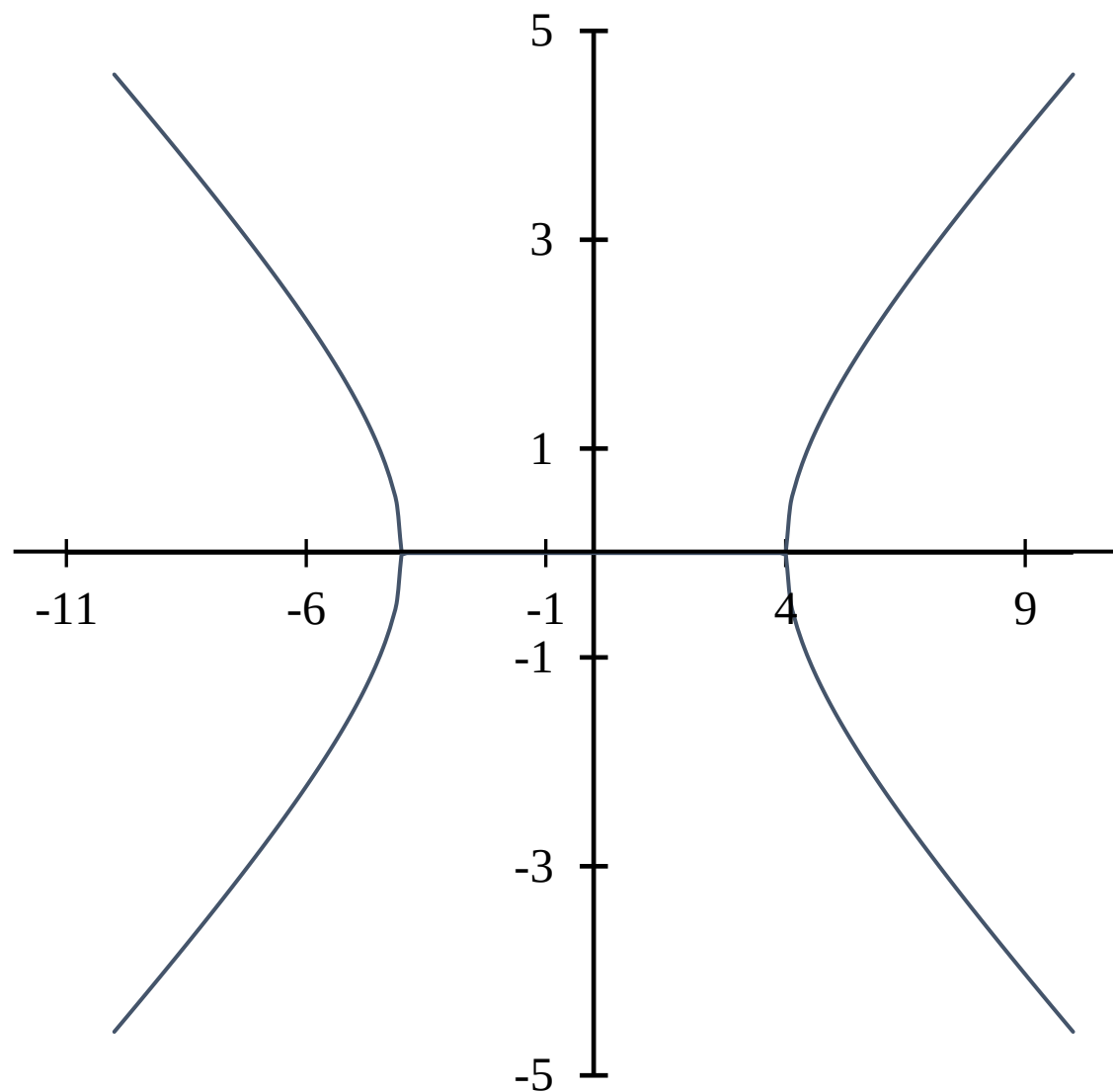
Nejde o graf funkce.



Příklad 8.

Je zobrazená křivka grafem funkce?

Nejde o graf funkce.



Příklad 9.

Dirichletova funkce $D(x)$ je funkce definovaná předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \text{ je racionální číslo,} \\ 0, & \text{jestliže } x \text{ je iracionální číslo.} \end{cases}$$

Určíme její definiční obor, obor hodnot a graf.

$$D(D) = (-\infty, \infty), H(D) = \{0, 1\}.$$



Podíváme-li se na graf, tak jde pouze o náznak grafu.



 **DĚKUJI ZA
POZORNOST**