AKADEMIE VŠEM STŘEDNÍ ŠKOLA

Matematika

1. ročník

24. 01. 2023

Mgr. Ing. Jiří Tobíšek

Akademie VŠEM - střední škola

Kvadratické nerovnice – příklady k procvičení

a) $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$ $\quad x \in \langle 1, \frac{4}{3} >$

b) $2x^2 - 7x - 15 \leq 0$ $\quad x \in < -\frac{3}{2}, 5 >$

c) Najděte všechny reálná čísla „a“ tak, aby daná rovnice měla kladné řešení:

$4 - a = \dfrac{2}{x-1}$ $\quad a \in (-\infty, 4) \cup (6, \infty)$

d) Najděte všechny reálná čísla „m“ tak, aby daná rovnice měla kořen > 4

$\dfrac{3x-1}{m} - 5 = 2x$ $\quad m \in (\frac{11}{9}, \frac{3}{2})$

e) $5(x-1) - x(7-x) \leq x^2$

$x \in < -\frac{5}{2}, \infty >$

f) $(2-3x) - (x-1) \geq -4 - (x-2)^2$

$x \in (-\infty, 4 - \sqrt{5} > \cup < 4 + \sqrt{5}, \infty)$

g) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-2} \geq 0$ $\quad x \in < 0, 2) \cup < 9, \infty)$

h) $\dfrac{(5x-4)^2 - (4x-3)^2}{(3x-5)^2} < 1$

$x \in (-\infty, \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, \frac{9}{7})$

Funkce jedné proměnné

Funkce jedné proměnné

Řekneme, že $f(x)$ je funkce jedné proměnné* (nebo zkráceně funkce), *jestliže f je přesný předpis, který každému reálnému číslu x přiřazuje nejvýše jedno reálné číslo $y = f(x)$ nazývané funkční hodnotou funkce f v bodě x.

***Definiční obor funkce* $f(x)$, *který značíme* $D(f)$, *je množina všech reálných čísel* x, pro která existuje *funkční* hodnota $y = f(x)$.**

***Obor hodnot funkce* $f(x)$, *který značíme* $H(f)$, *je množina* $\{f(x); x \in D(f)\}$,**

tj. $H(f) = \{f(x); x \in D(f)\}$.

***Je-li $f(x)$ funkce jedné proměnné, potom graf funkce $f(x)$ je množina všech bodů v rovině $[x, f(x)]$ pro $x \in D(f)$,* tj. jde o množinu $\{[x, f(x)]; x \in D(f)\}$.**

Funkce absolutní hodnota

$$f(x) = |x|$$

$x \geq 0 \qquad |x| = x$

$x < 0 \qquad |x| = -x$

Funkce absolutní hodnota

Každému reálnému číslu x je přiřazeno právě jedno číslo $|\boldsymbol{x}|$:

$|\boldsymbol{x}| = x$ pro $x \geq 0$,

$|\boldsymbol{x}| = -x$ pro $x < 0$.

Toto číslo $|\boldsymbol{x}|$ se nazývá **absolutní hodnota** reálného čísla x

Geometrický význam absolutní hodnoty:

Číslo $|\mathbf{a}|$ odpovídá vzdálenosti obrazu čísla a na číselné ose od počátku.

Některé vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla

Pro každé reálné číslo a, b platí:

$$|\boldsymbol{a}| \geq \mathbf{0}$$

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$$

$$|-\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a}$$

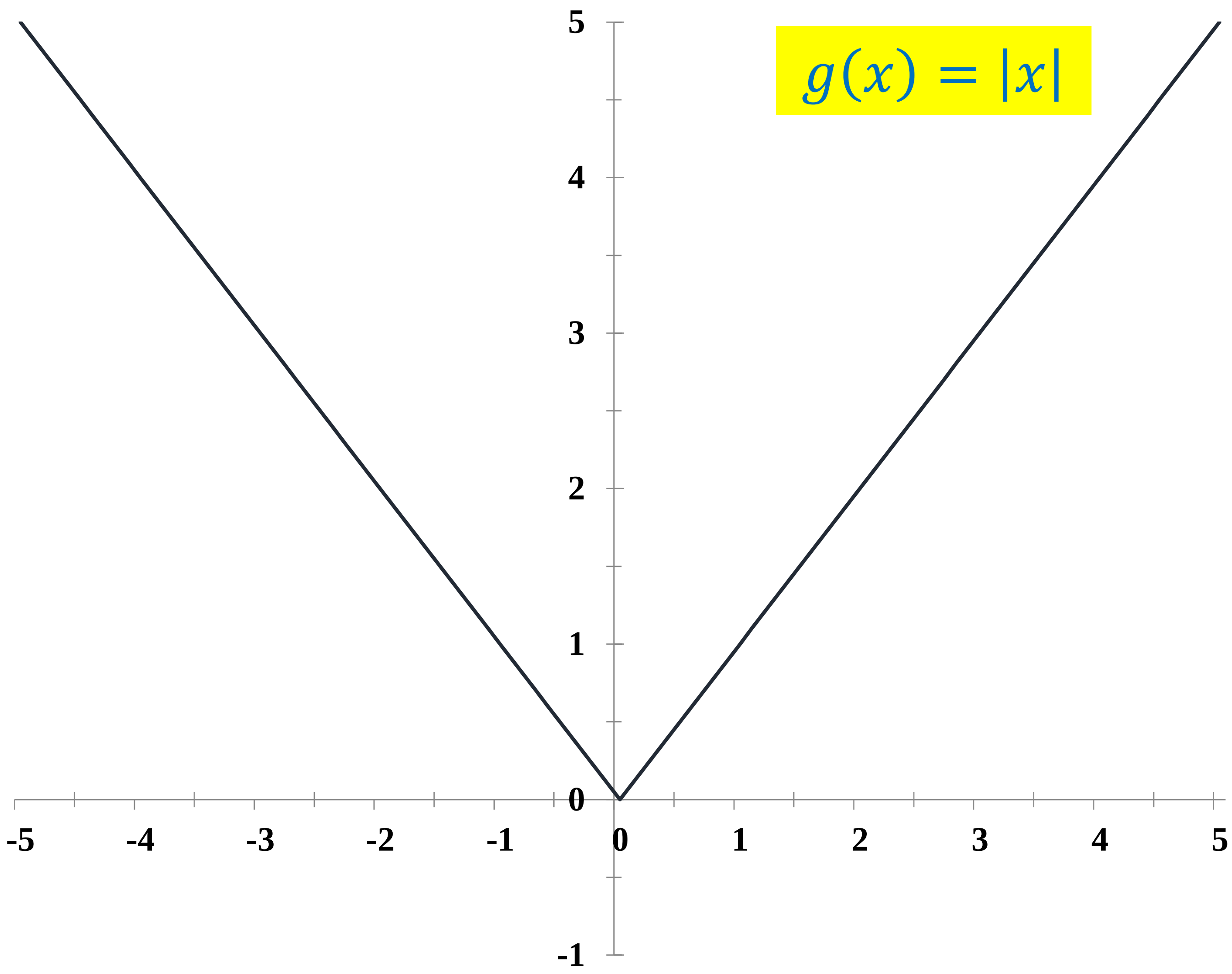
Příklad 20a.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

$D(g) = (-\infty, \infty)$,

$H(g) = \langle 0, \infty)$.

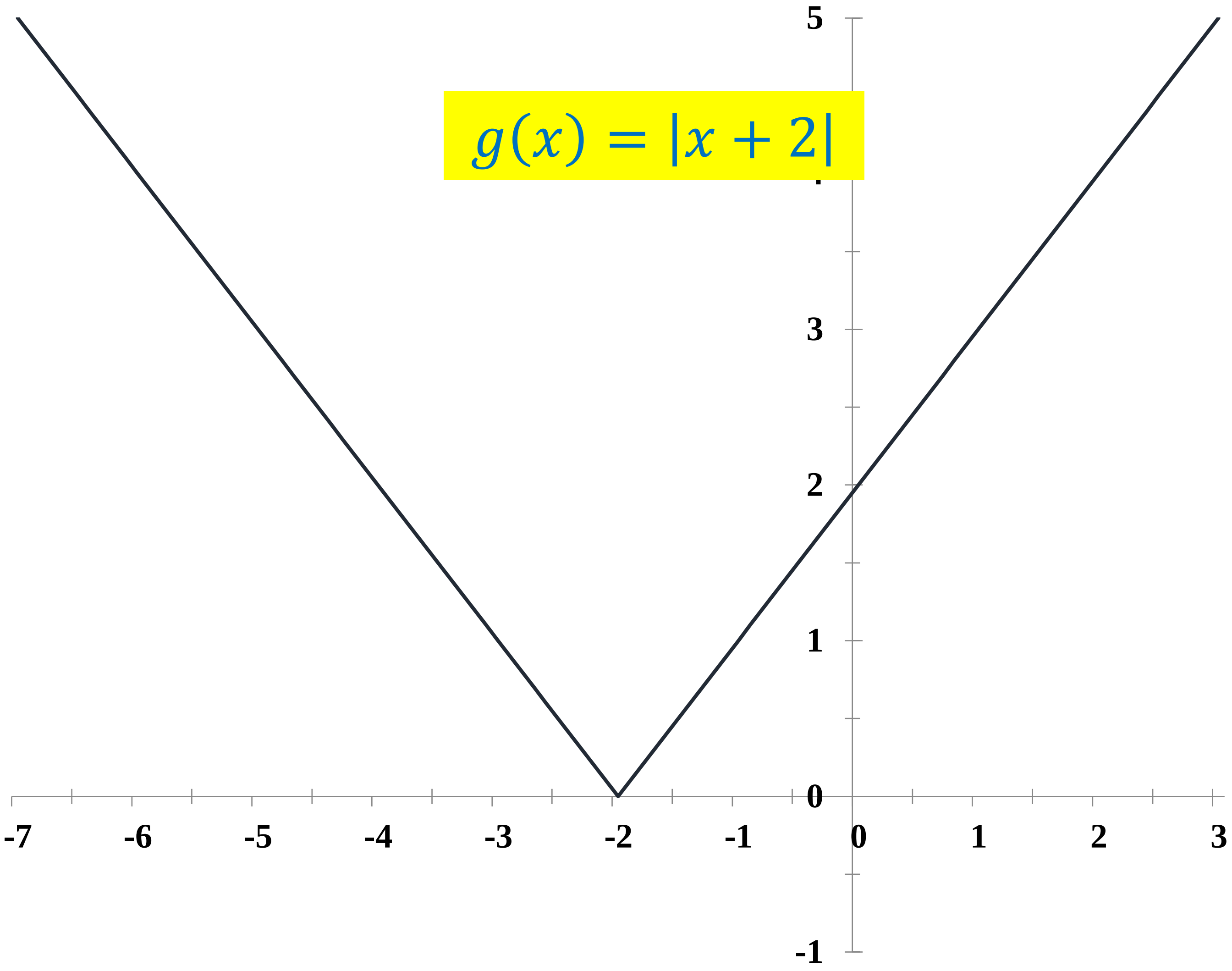


Příklad 20b.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x + 2|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.

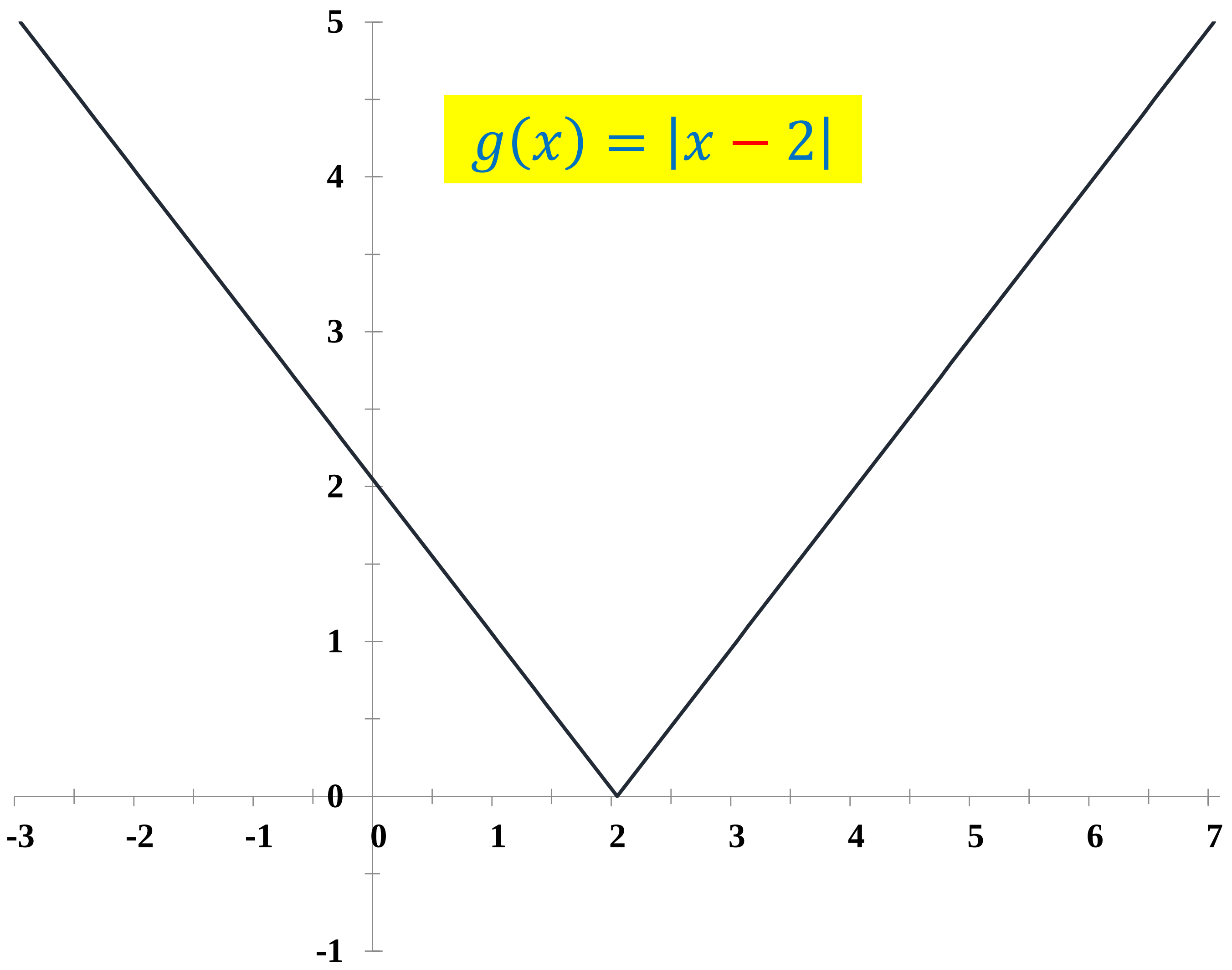
$D(g) = (-\infty, \infty)$,
$H(g) = \langle 0, \infty)$.



Příklad 20c.

Uvažujme funkci $g(x)$, definovanou předpisem, který každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = |x - 2|$.

Určíme její definiční obor, obor hodnot i graf.



$D(g) = (-\infty, \infty)$,

$H(g) = \langle 0, \infty)$.

Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

V množině reálných čísel řešte rovnici

$$|4 - x| - |2x + 3| = -17$$

a) $4 - x \geq 0 \Rightarrow |4 - x| = 4 - x$

$-x \geq -4$

$x < 4$

$x \in (-\infty, 4)$

b) $4 - x < 0 \Rightarrow |4 - x| = -4 + x$

$-x < -4$

$x \geq 4$

$x \in < 4, \infty)$

c) $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow |2x + 3| = 2x + 3$

$2x + 3 \geq 0$

$2x \geq -3$

$x \in \left\langle -\frac{3}{2}, \infty \right)$

d) $2x + 3 < 0 \Rightarrow |2x + 3| = -2x - 3$

$2x + 3 < 0$

$2x < -3$

$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

V množině reálných čísel řešte rovnici

$$|4-x| - |2x+3| = -17$$

a) $4 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; |4-x| = 4 - x$

$x \in (-\infty, 4\rangle$

b) $4 - x < 0 \;\Rightarrow\; |4-x| = -4 + x$

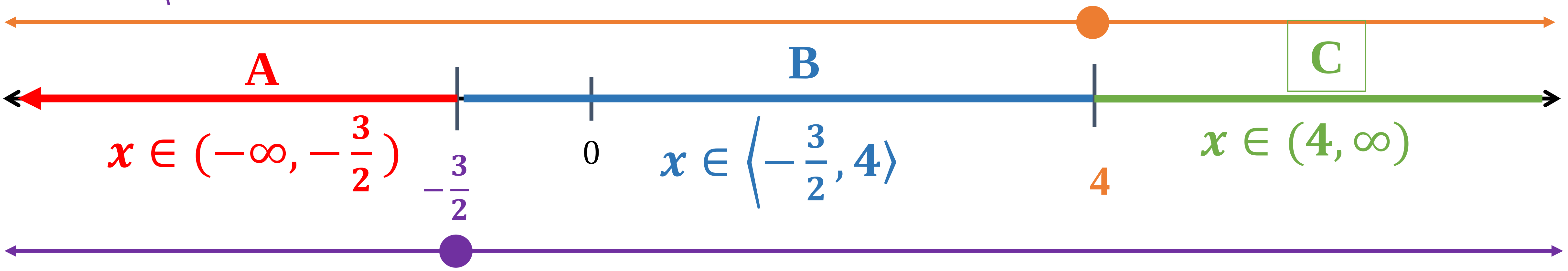
$x \in (4, \infty)$

c) $2x + 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; |2x+3| = 2x + 3$

$x \in \left\langle -\frac{3}{2}, \infty \right)$

d) $2x + 3 < 0 \;\Rightarrow\; |2x+3| = -2x - 3$

$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$



Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

$$|4 - x| - |2x + 3| = -17$$

a) $4 - x \geq 0 \Rightarrow |4 - x| = 4 - x$

$x \in (-\infty, 4)$

b) $4 - x < 0 \Rightarrow |4 - x| = -4 + x$

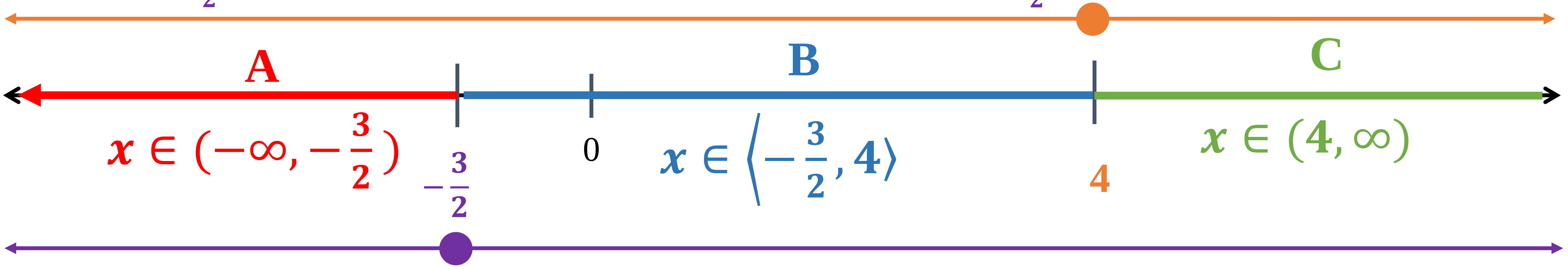
$x \in < 4, \infty)$

c) $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow |2x + 3| = 2x + 3$

$x \in < -\frac{3}{2}, \infty)$

d) $2x + 3 < 0 \Rightarrow |2x + 3| = -2x - 3$

$x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$



A) $|4 - x| - |2x + 3| = 4 - x - (-2x - 3)$

B) $|4 - x| - |2x + 3| = 4 - x - (2x + 3)$

C) $|4 - x| - |2x + 3| = -4 + x - (2x + 3)$

Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

$$|4-x|-|2x+3|=-17$$

A) $|4-x|-|2x+3|=4-x-(-2x-3)$

$$4-x-(-2x-3)=-17$$

$$-x+2x=-17-4-3$$

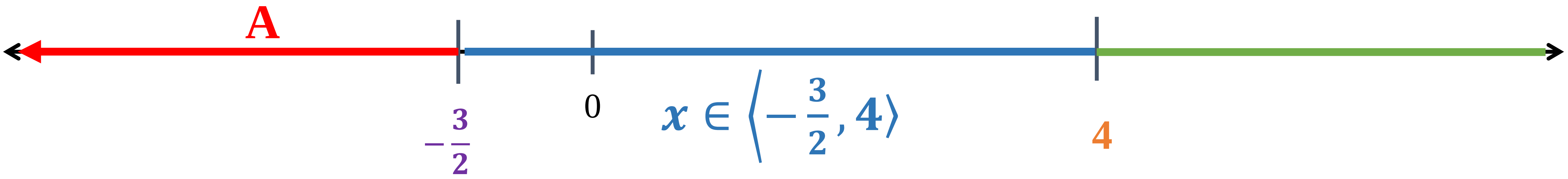
$$x=-17-4-3$$

$$x=-24 \;\Rightarrow\; x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

Řešení: $x \in \{-24\}$

Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

$$|4-x|-|2x+3|=-17$$



B) $|4-x|-|2x+3| = 4-x-(2x+3)$

$$4-x-(2x+3)=-17$$

$$-x-2x=-17-4+3$$

$$-3x=-18$$

$$x=6$$

$$x=6 \Rightarrow \ x \notin < -\frac{3}{2}, 4\rangle$$

Řešení: $x \in \{\emptyset\}$

Rovnice s absolutní hodnotou – Příklad

$$|4 - x| - |2x + 3| = -17$$

C) $|4 - x| - |2x + 3| = -4 + x - (2x + 3)$

$$-4 + x - (2x + 3) = -17$$

$$x - 2x = -17 + 4 + 3$$

$$-x = -10$$

$$x = 10$$

$$x = 10 \Rightarrow \ x \in (4, \infty)$$

Řešení: $x \in \{10\}$

$$x \in \{-24;\ 10\}$$

Rovnice s absolutní hodnotou – příklady

V množině reálných čísel řešte rovnice

a) $|x| + |x+2| = 4$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{-3; 1\}$

b) $|5 - x| = |x - 1|$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{3\}$

c) $|x+2| = 4|x-3|$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{2\}$

d) $x + |x| = 0$ $\quad \boldsymbol{x} \in (-\infty, 0\rangle$

e) $|x - 1| + |x + 2| = 3$ $\quad \boldsymbol{x} \in \langle -2, 1>$

f) $|4x - 7| + |6x + 15| = 18$ $\quad \boldsymbol{x} \in \left\{-\frac{13}{5}; -2\right\}$

g) $|2x + 1| - |2x| + 1 = 2x$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{1\}$

h) $|x - 5| - |2x + 11| = 6$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{-10; -4\}$

i) $|x - 3| = |3x + 2| - 1$ $\quad \boldsymbol{x} \in \{-3; 12\}$

DĚKUJI ZA POZORNOST